УДК 51-74

Янчук П. С., к.ф.-м.н., професор (Міжнародний економіко-гуманітарний університет, м. Рівне)

КВАЗІСПЕКТРАЛЬНІ ПОЛІНОМИ ТА РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

У роботі побудовано формули наближеного розв'язку неоднорідної першої початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності у вигляді алгебраїчних поліномів. Наближена формула має вигляд ряду Фур'є за некласичними ортогональними на відрізку поліномами з коефіцієнтами у вигляді експоненціальних функцій. У цій роботі досліджується зв'язок між рядом Фур'є за квазі-спектральними поліномами розв'язку та рядом Фур'є відомих з умови задачі функцій і на цій основі суттєво покращена формула наближеного розв'язку і одержано нові оцінки апроксимації наближеного розв'язку. Характерною рисою реалізації одержаної формули є економія машинної пам'яті, висока швидкодія та відмінна якість наближення. З точки зору машинних обчислень дане наближення практично мало відрізняється від середньоквадратичного наближення (наближення в просторі L_2 сумовних з квадратом функцій) рядом Фур'є-Лежандра і не поступається в точності обчислень в рівномірній метриці на основі ряду Фур'є-Чебишова.

Численні статті і монографії присвячені обчислювальним методам на основі методу Гальоркіна є, наприклад, в списку літератури, наведеному в [2; 3]. Оптимальне в енергетичній метриці поліноміальне наближення розв'язку рівняння теплопровідності з умовами Діріхле можна знайти методом Рітца, який відносять до методів типу Гальоркіна. У цьому випадку доведеться розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь із щільною матрицею. Проте, коли в ролі базисних функцій взяти внутрішні квазіспектральні поліноми, то для рівняння теплопровідності з однорідними крайовими умовами дістанемо систему з діагональною матрицею, бо базисні функції, в цьому випадку, ортогональні разом з першими похідними. Але виникають труднощі одночасно якісної апроксимації диференційного рівняння та крайових умов і одержання належних апріорних оцінок апроксимації. Ці проблеми розв'язані шляхом вивчення подвійних поліноміальних рядів Фур'є в просторі функцій з інтегрованим квадратом в прямокутнику.

Квазі-спектральні поліноми K_i° є розв'язками квазі-спектрального рівняння

$$-\frac{d^2}{dx^2}K_i^\circ = \lambda_i^\circ K_i^\circ + \tau_i^\circ \overline{P}'_{2n+2-\bar{i}}, \quad i = 1,...,2n, \tag{1}$$

де, $\tau_i^\circ = \lambda_i^\circ \sqrt{\lambda_i^\circ}\tau_i$, $\overline{P}'_{2n+2-\bar{i}}$ похідні поліномів Лежандра.

«Майже спектральність» поліномів K_i°, яку ми називаємо квазіспектральністю і яка виражається рівністю (1), дозволяє просто розв'язувати рівняння теплопровідності з умовами Діріхле методом подвійних квазіспектральних рядів Фур'є, як і методом подвійних тригонометричних рядів Фур'є, причому неоднорідність крайових умов не ускладнює розв'язування.

Поліноми K_i° утворюють ортонормовані системи поліномів:

$$\int_{-1}^{1} K_i^\circ(x) K_j^\circ(x)\,dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$
$$i = 1,...,2n, \quad j = 1,...,2n.$$

Коефіцієнти Фур'є $u_{i,j}^\circ(t)\big(i, j = 1,...,2n\big)$ за квазі-спектральними поліномами $K_i^\circ(x)K_j^\circ(y),\big(i, j = 1,...,2n+2\big)$ назвемо внутрішніми, а всі інші крайовими. Внутрішні коефіцієнти Фур'є знаходяться з рівняння теплопровідності, а крайові коефіцієнти з крайових умов.

Розглянемо першу початково-крайову задачу у наступній постановці:

Знайти таку функцію $u = u(x, y, \mathrm{t})$, *яка задовольняє рівняння теплопровідності*

$$u_t = \left(\alpha_x u_{xx} + \alpha_y u_{yy}\right) + f(x, y, t),$$

початкову умову

$$u(x, y, 0) = \zeta(x, y)$$

та крайові умови

$$u(x, -1, t) = \varphi_1(x, t), u(x, 1, t) = \varphi_2(x, t),$$
$$u(-1, y, t) = \psi_1(y, t), u(1, y, t) = \psi_2(y, t).$$

Враховуючи крайові значення функції u, дістанемо

$$\varphi_{2i}\left(t\right)=\int\limits_{-1}^{1}u\left(x,1,t\right)K_i^{\circ}\left(x\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}\varphi_2\left(x,t\right)K_i^{\circ}\left(x\right)dx,$$

$$\varphi_{1i}=\int\limits_{-1}^{1}u\left(x,-1,t\right)K_i^{\circ}\left(x\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}\varphi_1\left(x,t\right)K_i^{\circ}\left(x\right)dx,$$

де

$$\varphi_2\left(x,t\right)=u\left(x,1,t\right),\varphi_1\left(x,t\right)=u\left(x,-1,t\right),\psi_2\left(y,t\right)=u\left(1,y,t\right),\psi_1\left(y,t\right)=u\left(-1,y,t\right).$$

Обчислимо із початкової умови коефіцієнти Фур'є

$$\varsigma_{ij}\left(t\right)=\int\limits_{-1}^{1}\varsigma\left(x,y\right)K_i^{\circ}\left(x\right)K_j^{\circ}\left(x\right)dxdy.$$

Справедливі формули

$$\left(u_{xx}\right)_{i,j}^{\circ}\left(t\right)=-\lambda_i^{\circ}u_{i,j}^{\circ}\left(t\right)+d_i\left(\psi_{2j}\left(t\right)+\left(-1\right)^{i+1}\psi_{1j}\left(t\right)\right)+N_{\bar{i}}\tau_i^{\circ}\left(u_x\right)_{2n+2-\bar{i},j}\left(t\right)$$

та

$$\left(u_{yy}\right)_{i,j}^{\circ}\left(t\right)=-\lambda_i^{\circ}u_{i,j}^{\circ}\left(t\right)+d_j\left(\varphi_{2i}\left(t\right)+\left(-1\right)^{i+1}\varphi_{1i}\left(t\right)\right)+N_{\bar{j}}\tau_j^{\circ}\left(u_y\right)_{i,2n+2-\bar{j}}\left(t\right).$$

Прирівнявши однакові коефіцієнти Фур'є лівої та правої частини рівняння теплопровідності, дістанемо

$$\left(u_t\right)_{i,j}^{\circ}=\alpha_x\left(u_{xx}\right)_{i,j}^{\circ}+\alpha_y\left(u_{yy}\right)_{i,j}^{\circ}+\left(f\right)_{i,j}^{\circ},$$

а застосувавши формули диференціювання матимемо

$$\left(u_t\right)_{i,j}^{\circ}=\alpha_x\left[-\lambda_i^{\circ}u_{i,j}^{\circ}\left(t\right)+d_i\left(\psi_{2j}\left(t\right)+\left(-1\right)^{i+1}\psi_{1j}\left(t\right)\right)+N_{\bar{i}}\tau_i^{\circ}\left(u_x\right)_{2n+2-\bar{i},j}\left(t\right)\right]+$$
$$\alpha_y\left[-\lambda_i^{\circ}u_{i,j}^{\circ}\left(t\right)+d_j\left(\varphi_{2i}\left(t\right)+\left(-1\right)^{i+1}\varphi_{1i}\left(t\right)\right)+N_{\bar{j}}\tau_j^{\circ}\left(u_y\right)_{i,2n+2-\bar{j}}\left(t\right)\right]+\left(f\right)_{i,j}^{\circ}.$$

Із попередніх міркувань випливають диференційні рівняння для коефіцієнтів Фур'є:

$$\left(u_t\right)_{i,j}^{\circ}+\left(\lambda_i^{\circ}\alpha_x+\lambda_j^{\circ}\alpha_y\right)u_{i,j}^{\circ}\left(t\right)=F_{ij}+\left(f\right)_{i,j}^{\circ}+\varepsilon_{ij},$$

де,

$$F_{ij}=d_i\alpha_x\left(\psi_{2j}\left(t\right)+\left(-1\right)^{i+1}\psi_{1j}\left(t\right)\right)+d_i\alpha_x\left(\psi_{2j}\left(t\right)+\left(-1\right)^{i+1}\psi_{1j}\left(t\right)\right).$$

З доведених формул, для коефіцієнтів Фур'є за системою квазіспектральних поліномів випливає, що

$$u_{i,j}^{\circ}\left(t\right)=\varsigma_{ij}\left(t\right)+e^{-a\tau}\left(\int\limits_{t_0}^{t}g_{ij}\left(\tau\right)e^{a\tau}d\tau\right),\qquad(2)$$

де

$$a = \lambda_i^{\circ}\alpha_x + \lambda_j^{\circ}\alpha_y,\ g_{ij}(t) = F_{ij}(t) + (f)_{i,j}^{\circ}(t).$$

Насамкінець, одержане наближення подамо у вигляді

$$u^n = \sum_{i,j=1}^{2n}\left[\varsigma_{ij}(t) + e^{-a\tau}\left(\int_{t_0}^{t} g_{ij}(\tau)e^{a\tau}d\tau\right)\right]K_i^{\circ}(x)K_j^{\circ}(y).$$

Для одержаного наближення u^n розв'язку неоднорідної задачі для рівняння теплопровідності з умовами Діріхле порядок наближення дорівнює $O\left(N^{-k}\right)$ відносно степеня полінома $N = 2n+1$. Встановлена в роботі оцінка для наближеного розв'язку u^n має такий самий порядок наближення і відрізняється від середньоквадратичного наближення доданком порядку $O\left(N^{-k}\right)$, який виник із-за апроксимації диференційного рівняння, та доданком порядку $O\left(N^{-k-3/2}\right)$, який виник із необхідності задовольнити крайові умови. У цьому сенсі одержано таке явне наближення розв'язку початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності алгебраїчними поліномами, яке має максимально можливий порядок швидкості збіжності в просторі $L_2(\Pi)$. Такі наближення можна назвати майже середньоквадратичними наближеннями. Розглянуті приклади показують, що похибка апроксимації поліномами u^n в чебишовській (рівномірній) метриці має такий самий високий порядок, як і в середньоквадратичній метриці.

Якщо $\forall t,\ \ f \in L_2(\Pi)$, а крайові умови достатньо гладкі: $u|_{\partial\Pi} \in W_2^1(\partial\Pi)$, то $u \in W_2^2(\Pi)$. У цьому випадку середньоквадратична похибка одержаного наближення розв'язку задачі теплопровідності з умовами Діріхле є величиною порядку $O\left(N^{-2}\right)$, де N степінь наближеного полінома.

1. Янчук П. С. Использование А-метода при решении эллиптических и параболических уравнений / П. С. Янчук // Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов. – Киев, 1989. – С. 112–121. **2**. Янчук П.С. Квазіспектральні многочлени та крайові задачі / П. С. Янчук //Волинський математичний вісник. –1999. – Вип. 6. – С. 183–187. **3**. Янчук П. С. Метод многочленних рядів Фур'є для задачі Діріхле для рівняння Пуассона в квадраті $[-1,1]\times[-1,1]$ / П. С. Янчук // Волинський математичний вісник. – 2000. – Вип. 7. – С. 193–208. **4**. Янчук П. С. Поліноміальна апроксимація розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона з неоднорідними крайовими умовами / П. С. Янчук // Волинський математичний вісник. – 2011. – Вип. 8 (17). – С. 213–239.