УДК 517.518.82:517.518.36:517.518.45

Мушировська Анастасія, ст. магістратури факультету кібернетики;
науковий керівник – к.ф.-м.н., професор Янчук П. С (Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем'янчука, м. Рівне)

КВАЗІСПЕКТРАЛЬНІ ПОЛІНОМИ ТА РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ

Анотація. *У статі досліджено зв'язок між рядом Фур'є за квазіспектральними поліномами розв'язку та рядом Фур'є відомих з умови задачі функцій. Покращено формулу наближеного розв'язку та одержано нові оцінки апроксимації наближеного розв'язку. Визначено, що характерною рисою реалізації одержаної формули є економія машинної пам'яті, висока швидкодія та відмінна якість наближення.*
Ключові слова*: моделювання,задача Діріхле, квазі-спектральні поліноми.*

Аннотация. *В статье исследована связь между рядом Фурье по квазиспектральнимы полиномами развязку и рядом Фурье известных из условия задачи функцій. Улучшена формула приближенного решения и получены новые оценки аппроксимации приближенного решения. Определено, что характерной чертой реализации полученной формулы есть экономия машинной памяти, высокое быстродействие и отличное качество приближения.*
Ключевые слова: *моделирование, задача Дирихле, квази-спектральные полиномы.*

Annotation *The article studies the relationship between the Fourier series of quasi-spectral polynomials and Fourier series solutions known from the problem situation of functions, and on this basis it was significantly improved formula of approximate solutions and new estimates of approximation of approximate solutions. It was determined that a characteristic feature of the implementation of the resulting formula is the saving of computer memory, high speed and excellent quality of approximation.*
Keywords: *modelling, Dirichlet problem, quasi-spectral polynomials.*

Квазіспектральні поліноми $K_i^{\circ}(x)$ вивчались П. Янчуком і застосовувались до побудови наближеного розв'язку диференціальних рівнянь в низці робіт, і зокрема в роботах [6–8]. В роботі [6] розглядалося наближення розв'язку задачі Діріхле з однорідними умоваи, в роботі [8] – з неоднорідними умовами, в роботі [7] розглянуті крайові задачі для звичайних диференційних рівнянь з неоднорідними умовами.

Метою нашої роботи є дослідження зв'язку між рядом Фур'є за квазіспектральними поліномами розв'язку і рядом Фур'є відомих з умови задачі функцій, покращення формули наближеного розв'язку та одержання нової оцінки апроксимації наближеного розв'язку.

Характерною рисою реалізації одержаної формули є економія машинної пам'яті, висока швидкодія та відмінна якість наближення. З точки зору машинних обчислень таке наближення практично нічим не відрізняється від середньоквадратичного наближення ряду Фур'є-Лежандра і не поступається в точності обчислень в рівномірній метриці на основі ряду Фур'є-Чебишова.

Розглянемо для прикладу задачу кручення балки з квадратним перерізом, яка описується рівняннями

$$u_{xx} + u_{yy} = -1, \tag{1}$$

$$u(x, \pm 1) = u(\pm 1, y) = 0. \tag{2}$$

Точний розв'язок задачі (1), (2) відомий і виражається подвійним тригонометричним рядом

$$u(x,y) = 32\pi^{-4} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{i} \left(i^4 - (i-2j+1)^4 \right)^{-1} \times \times \cos\left(i - j + \frac{1}{2} \right) \pi x \cos\left(j - \frac{1}{2} \right) \pi y. \tag{3}$$

За одержаною в роботі формулою після деяких спрощень наближений розв'язок задачі алгебраїчним поліномом 5 степеня дорівнює

$$\tilde{u}^2(x,y) = 1/512 (x-1)^2 (y-1)^2 \left(63x^2y^2 + 21x^2 + 21y^2 + 151 \right) \tag{4}$$

З абсолютною похибкою < 0.001 за формулою (4)

$$u(0,0) \approx 151/512 = 0.29492..., u(0.5, 0.5) \approx 23823/131072 = .18176... \cdot$$

Ряд (3) повільно збігається і тому знаходження для u таких поліномів, як наприклад (4), вигідно. Наближені розв'язки в загальному випадку подаватимемо у вигляді алгебраїчного полінома степеня $2n+1$:

$$\tilde{u}^n = \sum_{i,j=0}^{2n+1} u_{ij} K_i^\circ(x) K_j^\circ(y), \tag{5}$$

де, $K_i^\circ(x)$, $i = 1,...,2n+2$ ортонормовані на відрізку $[-1,1]$ алгебраїчні поліноми. Крім цього, поліноми $K_i^\circ(x)$, $i = 1,...,2n$, які назвемо внутрішніми, дорівнюють нулю при $x = \pm 1$, а їхні перші похідні є ортогональними на $[-1,1]$. Два поліноми, що залишилися, назвемо крайовими. Їх будемо застосовувати для врахування крайових умов. В [1] даються методи на основі поліномів Чебишова, які зводять задачі для еліптичних рівнянь до систем звичайних диференційних, або лінійних рівнянь.

Розглянемо ще один приклад. Розв'язком задачі

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{6}$$

$$u(x, \pm 1) = \pm y, \quad u(\pm 1, y) = \pm x \tag{7}$$

є функція $u = xy$. Тригонометричний ряд функції u і в цьому випадку повільно збігається. Явна поліноміальна формула, побудована в даній роботі знайде такий розв'язок точно. Взагалі, розв'язок знаходиться точно, якщо він є поліномом степеня не вище $2n+1$ по кожній змінній. Із прямих теорем апроксимації (теорем Джексона) встановлено, що якщо розв'язок не поліноміальний, то наближені розв'язки збігаються до точного майже із швидкістю середньоквадратичного наближення. Напевно, знайти середньоквадратичне наближення алгебраїчними поліномами розв'язку рівняння Пуассона в загальному випадку неможливо (проте, можливо знайти його у вигляді тригонометричного ряду).

Численні статті і монографії присвячені обчислювальним методам на основі методу Гальоркіна наведено в списку літератури [2; 3]. Оптимальне в енергетичній метриці поліноміальне наближення розв'язку задачі Діріхле можна знайти методом Рітца, який відносять до методів типу Гальоркіна. В даному випадку взагалі кажучи доведеться розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь із щільною матрицею. Проте, коли в ролі базисних функцій взяти внутрішні квазіспектральні поліноми, то для задачі Діріхле з однорідними крайовими умовами дістанемо систему з діагональною матрицею, бо базисні функції в даному випадку ортогональні разом з першими похідними. Але, виникають труднощі одночасно якісної апроксимації диференційного рівняння та крайових умов та одержання належних апріорних оцінок апроксимації. Ці проблеми в даній роботі розв'язані шляхом вивчення подвійних поліноміальних рядів Фур'є в просторі функцій з інтегрованим квадратом в прямокутнику.

Основні означення і властивості квазіспектральних поліномів [6-8].

Через $J = J_x$ позначимо операцію інтегрування $(J_x u)(x) = \int\limits_{-1}^{x} u(t)\,dt$,

а через $J^m = J\left(J^{m-1}\right)$ повторне m – кратне застосування цієї операції.

Через M_k^m позначимо множину всіх алгебраїчних поліномів, які є лінійними комбінаціями поліномів Лежандра $P_i, \quad i = k,\dots,m, \quad P_i(1) = 1$.

Через π_k^m позначимо операцію проектування $\left(\pi_k^m u\right)(x) = \sum\limits_{i=k}^{m} c_i P_i(x)$,

де $u = \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i P_i(x) \in L_2[-1,1]$ – ряд Фур'є-Лежандра функції u.

Оператор $-\pi_1^{2n} J_{xx} : \mathrm{M}_1^{2n} \to \mathrm{M}_1^{2n}$ є симетричним і додатно визначеним, тому існують $2n$ таких поліномів $K_i = K_i(x)$ і $2n$ таких додатних чисел λ_i (характеристичних чисел), для яких справджуються рівність

$$-\pi_1^{2n} J_{xx} K_i = \lambda_i K_i, \quad i = 1,\dots,2n. \tag{8}$$

Звідси дістаємо, що для заданого фіксованого натурального n квазіспектральні поліноми $K_i = K_i(x)$ задовольняють квазіспектральне інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} &-\pi_1^{\infty} J_{xx} K_i = \lambda_i K_i + \tau_i \bar{P}_{2n+2-\bar{i}}, \quad \bar{i} = i \bmod 2, \\ &\bar{P}_i(x) = \left(1/\sqrt{i(i+1)}\right) P_i(x), \quad i = 1,\dots,2n \end{aligned} \tag{9}$$

для деяких дійсних чисел λ_i, τ_i, причому їх парність співпадає з парністю їх індексів. Для уникнення двозначності звернемо увагу, що $\bar{i} = 0$ для парних i та $\bar{i} = 1$ для непарних.

Диференціюючи рівність (9) один раз по x, дістанемо

$$-J_x K_i = \lambda_i \frac{d^2}{dx^2} J_x K_i + \tau_i \frac{d}{dx} \bar{P}_{2n+2-\bar{i}}, \quad i = 1,\dots,2n \tag{10}$$

Через $K_i^{\circ} = \sqrt{\lambda_i^{\circ}}\, J_x K_i, \quad \lambda_i^{\circ} = 1/\lambda_i, \quad i = 1,\dots,2n$ позначимо поліноми, які, очевидно, перетворюється в нуль в точках $x = \pm 1$, а парність яких є протилежною парності їх індексів. Тоді, звісно $\frac{d}{dx} K_i^{\circ} = \sqrt{\lambda_i^{\circ}}\, K_i, \quad i = 1,\dots 2n$.

Замінимо функцію K_i на K_i° в (10) і дістанемо квазіспектральне диференційне рівняння

$$-K_i^\circ = \lambda_i \frac{d^2}{dx^2} K_i^\circ + \tau_i \sqrt{\lambda_i^\circ} \frac{d}{dx} \bar{P}_{2n+2-\bar{i}}, i = 1, ..., 2n, \bar{P}'_{2n+2-\bar{i}} = \frac{d}{dx} \bar{P}_{2n+2-\bar{i}}, \tag{11}$$

або,

$$-\frac{d^2}{dx^2} K_i^\circ = \lambda_i^\circ K_i^\circ + \tau_i^\circ \bar{P}'_{2n+2-\bar{i}}, \quad i = 1, ..., 2n \tag{12}$$

де, $\tau_i^\circ = \lambda_i^\circ \sqrt{\lambda_i^\circ} \tau_i$.

«Майже спектральність» поліномів K_i°, яку ми називаємо квазіспектральністю і яка виражається рівністю (12), дозволяє так же просто розв'язувати задачу Діріхле методом подвійних квазіспектральних рядів Фур'є як і методом подвійних тригонометричних рядів Фур'є, причому неоднорідність крайових умов не ускладнює розв'язування.
Зазначимо, що для поліномів Лежандра $\bar{P}_m$, $m = 1, 2, ...$ та їх похідних $\bar{P}'_m = \frac{d}{dx} \bar{P}_m$ справджуються рівності

$$\int_{-1}^{1} \left(\bar{P}'_m(x) \right)^2 dx = 1, \int_{-1}^{1} \left(\bar{P}_m(x) \right)^2 dx = 2 / \left(m(m+1)(2m+1) \right), \tag{13}$$
$$\bar{P}_m(1) = 1 / \sqrt{m(m+1)}, \bar{P}'_m(1) = \sqrt{m(m+1)} / 2.$$

Поліноми K_i та K_i° утворюють ортонормовані системи поліномів:

$$\int_{-1}^{1} K_i(x) K_j(x) dx = \int_{-1}^{1} K_i^\circ(x) K_j^\circ(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \tag{14}$$
$$i = 1, ..., 2n, \quad j = 1, ..., 2n,$$

причому, з точністю до множника, поліноми K_i є похідними поліномів K_i°.

Коефіцієнти Фур'є $u_{i,j}^\circ \left(i, j = 1, ..., 2n \right)$ за квазіспектральними поліномами $K_i^\circ(x) K_j^\circ(y), \left(i, j = 1, ..., 2n+2 \right)$ назвемо внутрішніми, а всі інші крайовими.

Внутрішні коефіцієнти Фур'є частинних похідних функцій за системою квазіспектральних поліномів. Знайдемо вираження для коефіцієнта Фур'є похідної $u_{xx} = \frac{d^2 u}{dx^2}$ функції $u = u(x, y)$ двох змінних.

Інтегруючи частинами та враховуючи рівності $K_i^\circ(\pm 1)=0, \quad i=1,\ldots,2n$, дістанемо

$$\left(u_{xx}\right)_{i,j}^\circ=-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}u_x K_j^\circ(y)\frac{d}{dx}K_i^\circ(x)\,dxdy \quad (i=1,\ldots,2n;\, j=1,\ldots,2n).$$

Інтегруючи ще раз частинами і використовуючи формулу

$$\frac{d^2}{dx^2}K_i^\circ(x)=-\lambda_i^\circ K_i^\circ(x)+\tau_i^\circ \bar{P}'_{2n+2-\bar{i}}(x),$$

де $\bar{i}=0$ при непарному i, та $\bar{i}=1$ при парному i, одержимо

$$\begin{aligned}\left(u_{xx}\right)_{i,j}^\circ=&-\lambda_i^{\circ-\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1}\left(K_i(1)u(1,y)-K_i(-1)u(-1,y)\right)K_j^\circ(y)\,dy-\lambda_i^\circ u_{i,j}^\circ+\\&+\tau_i^\circ\int_{-1}^{1}\left(\bar{P}_{2n+2-\bar{i}}(1)u(1,y)-\bar{P}_{2n+2-\bar{i}}(-1)u(-1,y)\right)K_j^\circ(y)\,dy-\\&-\tau_i^\circ\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}u_x\bar{P}_{2n+2-\bar{i}}(x)K_j^\circ(y)\,dxdy,\end{aligned} \tag{15}$$

де

$$\begin{aligned}\left(u_{xx}\right)_{i,j}^\circ&=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}u_{xx}K_i^\circ(x)K_j^\circ(y)\,dxdy,\\u_{i,j}^\circ&=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}uK_i^\circ(x)K_j^\circ(y)\,dxdy.\end{aligned} \tag{16}$$

Враховуючи крайові значення функції u, дістанемо

$$\begin{aligned}\varphi_{2i}&=\int_{-1}^{1}u(x,1)K_i^\circ(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\varphi_2(x)K_i^\circ(x)\,dx,\\\varphi_{1i}&=\int_{-1}^{1}u(x,-1)K_i^\circ(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\varphi_1(x)K_i^\circ(x)\,dx,\end{aligned} \tag{17}$$

де $\varphi_2(x)=u(x,1), \varphi_1(x)=u(x,-1), \psi_2(y)=u(1,y), \psi_1(y)=u(-1,y)$.

Підставимо (17) в (15) і одержимо

$$\left(u_{xx}\right)_{i,j}^\circ=-\lambda_i^\circ u_{i,j}^\circ+d_i\left(\psi_{2j}+(-1)^{i+1}\psi_{1j}\right)+N_{\bar{i}}\tau_i^\circ\left(u_x\right)_{2n+2-\bar{i},j}. \tag{18}$$

Аналогічно,

$$\left(u_{yy}\right)_{i,j}^{\circ} = -\lambda_i^{\circ} u_{i,j}^{\circ} + d_j\left(\varphi_{2i} + (-1)^{i+1}\varphi_{1i}\right) + N_{\bar{j}}\tau_j^{\circ}\left(u_y\right)_{i,2n+2-\bar{j}}. \qquad (19)$$

Загальний вигляд наближеного розв'язку задачі Діріхле. З доведених формул для коефіцієнтів Фур'є за системою квазіспектральних поліномів випливає наступна теорема.

Теорема 1. Часткова сума ряду Фур'є-Лежандра загального розв'язку $u \in W_2^2\left[-1,1\right]$ задачі Діріхле

$$\Delta u = f\left(x, y\right), \qquad (20)$$

$$\begin{aligned} u\left(x,-1\right) = \varphi_1\left(x\right), u\left(x,1\right) = \varphi_2\left(x\right), \\ u\left(-1,y\right) = \psi_1\left(y\right), u\left(1,y\right) = \psi_2\left(y\right) \end{aligned} \qquad (21)$$

має вигляд

$$\tilde{u}^n = \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{-f_{i,j}^{\circ} + d_i\left(\psi_{2j} + (-1)^{i+1}\psi_{1j}\right) + d_j\left(\varphi_{2i} + (-1)^{j+1}\varphi_{1i}\right)}{\lambda_i^{\circ} + \lambda_j^{\circ}} K_i^{\circ}\left(x\right) K_j^{\circ}\left(y\right), \qquad (22)$$

Поліноми $u^{\circ n}$ та $u^{\bullet n}$ є ортогональними, перший з них перетворюється на сторонах квадрата $\Pi = \left[-1,1\right] \times \left[-1,1\right]$ в нуль, а другий задовольняє крайовим умовам (21), а їх сума наближено задовольняє рівняння Пуассона (20). Оцінка поліномів покаже, якою є величина відхилення полінома $\tilde{u}^n$ від часткової суми ряду Фур'є-Лежандра u^n для функції u - точного розв'язку задачі Діріхле.

З проведеного дослідження можна зробити висновок, що для середньоквадратичного наближення $\tilde{u}^n$ розв'язку $u \in W_2^k\left(\Pi\right)$ неоднорідної задачі Діріхле справджується оцінка тобто порядок наближення дорівнює $O\left(N^{-k}\right)$ відносно степеня полінома $N = 2n+1$. Встановлена в роботі оцінка для наближеного розв'язку $\tilde{u}^n$ має такий самий порядок наближення і відрізняється від середньоквадратичного наближення доданком порядку $O\left(N^{-k}\right)$, який виник із-за апроксимації диференційного рівняння, та доданком порядку $O\left(N^{-k-3/2}\right)$, який виник із необхідності задовольнити крайові умови. В цьому сенсі одержано таке явне наближення розв'язку задачі Діріхле алгебраїчними поліномами, яке має максимально можливий порядок швидкості збіжності в просторі $L_2(\Pi)$. Такі наближення можна назвати майже середньоквадратичними наближеннями. Розглянуті приклади показують, що похибка апроксимації поліномами $\tilde{u}^n$ в чебишовській (рівномірній) метриці має такий само високий порядок як і в середньоквадратичній метриці.

Якщо $f \in L_2(\Pi)$, а крайові умови достатньо гладкі: $u|_{\partial\Pi} \in W_2^1(\partial\Pi)$, то $u \in W_2^2(\Pi)$. В цьому випадку середньоквадратична похибка одержаного наближення $u^{\circ n} + u^{\bullet n}$ розв'язку задачі Діріхле є величиною порядку $O\left(N^{-2}\right)$, де N степінь наближеного полінома.

1. Янчук П. С. Использование А-метода при решении эллиптических и параболических уравнений / П. С. Янчук // Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов. – Киев, 1989. – С. 112–121. **2**. Янчук П. С. Квазіспектральні многочлени та крайові задачі / П. С. Янчук // Волинський математичний вісник. – 1999. – Вип. 6. – С. 183–187. **3**. Янчук П. С. Метод многочленних рядів Фур'є для задачі Діріхле для рівняння Пуассона в квадраті $[-1,1]\times[-1,1]$ / П. С. Янчук // Волинський математичний вісник. – 2000. – Вип. 7. – С. 193–208. **4**. Янчук П. С. Поліноміальна апроксимація розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона з неоднорідними крайовими умовами / П. С. Янчук // Волинський математичний вісник. – 2011. – Вип. 8(17). – С. 213–239.