УДК 517.518.82:517.518.36:517.518.45

Найдюк Назар, ст. магістратури факультету кібернетики; науковий керівник – к.ф.-м.н., професор Янчук П. С. (Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем’янчука, м. Рівне)

ОПТИМАЛЬНЕ КОДУВАННЯ ТА ДЕКОДУВАННЯ ЧИСЛОВОЇ ІНФОРМАЦІЇ.

Анотація. *В статті використано новий підхід до комп’ютерного кодування та декодування періодичних та неперіодичних процесів. Визначено важливе значення тригонометричного базису, базисів класичних ортогональних поліномів та неокласичного базису із квазі-спектральних поліномів. Для розв’язування задач запропоновано застосовати нелінійні методи, які знаходять особливі точки. Побудовано та проаналізовано алгоритми оптимального кодування та декодування числової інформації.*
Ключові слова: *кодування, декодування, комп’ютерне моделювання, обробка сигналів, графічна інформація, квазі-спектральні поліноми.*

Аннотация. *В статье использован новый подход к компьютерному кодированию и декодированию периодических и непериодических процессов. Определено важное значение тригонометрического базиса, базисов классических ортогональных полиномов и неоклассического базиса с квази-спектральных полиномов. Для решения задач предложено использовать нелинейные методы, которые находят особые точки. Построены и проанализированы алгоритмы оптимального кодирования и декодирования числовой информации.*
Ключевые слова: *кодирование, декодирование, компьютерное моделирование, обработка сигналов, графическая информация, квази-спектральные полиномы.*

Annotation. *A new approach to computer encoding and decoding of periodic and non-periodic processes is applied in the article. The method is based on application of the Fourier series expansion of functions of one-variable and orthogonal systems of basic functions. The trigonometric basis and basis of classical orthogonal polynomials, and a neoclassical basis with quasi spectral polynomials is very important. One of the important problems is to encode the signals that convey digital coloured image. In general, this problem is very expensive and requires large amounts of computer memory. For its solution it is proposed to use nonlinear techniques that find the specific point. The algorithms of optimum encoding and decoding numeric information are constructed and analysed.*
Keywords: *encoding, decoding, computer modelling, simulation, signal processing, graphic information processing, quasi spectral polynomials.*

Опишемо математичну модель процесів кодування та декодування. Для цього визначимо деяку неперервну функцію $f = f(x)$ на проміжку $[a,b]$ та задаймо деяке розбиття цього проміжку $\omega = \{x_i\}_{i=0}^n$ на n попарно неперетинних проміжків. Будемо вважати точки розбиття впорядкованими за зростанням. Точкам розбиття поставимо у відповідність вектор $v = (v_0, v_1, ..., v_n)$ координати, якого знаходяться за формулами $v_i = f(x_i)$

Для кодування заданого вектора розглянемо систему лінійно незалежних функцій $\Phi = \{\varphi_i = \varphi_i(x)\}_{i=0}^n$. Закодуємо вектор v, поставивши йому у відповідність такий вектор $w = \{w_i\}_{i=0}^n$, для якого справджуються рівності

$$v_j = \sum_{i=0}^{n} w_i \varphi_i(x_j) \qquad (1)$$

Визначник $\left\|\varphi_i(x_j)\right\|_{i,j=0}^n$ не дорівнює нулеві із-за лінійної незалежності функцій φ_i, тому описаний алгоритм кодування векторів $v = (v_i)$ завжди має місце, але при цьому доводиться розвязувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Зворотна задача декодування простіша і вимагає лише властивості обчислювальності функцій φ_i.

Матрицю $A = \left\{\varphi_i(x_j)\right\}_{i,j=0}^n$ у випадку можливості обчислення функцій базису у довільній точці проміжку, завжди можна обчислити наперед і зберігати в одновимірному масиві, розміром $(n+1)\times(n+1)$, який ми будемо позначати також через A. Матрицю, обернену до A, позначимо через B. Тоді, задачу кодування можна подати у формі,

$$w = Bv, \qquad (2)$$

а задачу декодування у формі

$$v = Aw. \qquad (3)$$

Таким чином задачі кодування і декодування інформації можна звести до тривіальної задачі множення матриці на число.

Не змінюючи позначень будемо використовувати матриці в (2) розміром $n \times m$, де $m \geq n$, тобто прямокутні матриці, які виникають у методі найменших квадратів. Аналогічно в (3) застосовуватимемо матриці розміром $m \times n$.

Задачами кодування та відновлення інформації займалися М. Корнійчук та його учні. В даній роботі результати цих досліджень застосовуються до задач цифрової обробки інформації. Такі задачі виникають при обробці великих масивів графічної інформації. Якщо розглянути для прикладу вектори, що відповідають 8 пікселям, що йдуть підряд, тоді матриці A та B будуть розміру 8x8. Обробка в розрахунку на один піксель становитиме 8 операцій множення. У загальному випадку матриць розміром $n \times n$ кількість операцій множення становитиме n в розрахунку на один піксель та стільки само операцій множення для декодування. Але, якщо розглянути для прикладу вектори, що відповідають 1024 пікселям, що йдуть підряд, тоді матриці A та B будуть розміру 1024x8.

Окремим, але дуже важливим випадком кодування є застосування розвинення в ряди Фур'є. Для зручності розглянемо розвинення в комплексний ряд Фур'є. Для неперервних функцій справедливе представлення рядом Фур'є

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i\pi kx}, \tag{4}$$

де

$$a_k = \int_{-1}^{1} f(x) e^{-i\pi kx} dx \cdot \tag{5}$$

В дискретній формі відповідно, матимемо

$$f_j = \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{\frac{i\pi kj}{m}}, \tag{6}$$

де

$$a_k = \sum_{j=-m+1}^{m} f_j e^{-\frac{ij\pi}{m}}, \quad f_j = f\left(\tfrac{j}{m}\right). \tag{7}$$

Формули (6)–(7) дають відповідно пряме та обернене дискретне перетворення Фур'є, які одержані із відповідних формул для класичних рядів Фур'є. Вони є частковим випадком запису формул для кодування та декодування чисельної інформації, але в останньому випадку є алгоритми так званого швидкого перетворення Фур'є, які вимагають порядку $\ln(n)$ операцій множення в розрахунку на один пік сель. Коли потік числових даних є величиною залежною від часу, то ми таким чином зможемо мати моду, амплітуду та фазу сигналу.

Крім рядів Фур'є для кодування та декодування сигналів, можна застосовувати розвинення за алгебраїчними поліномами. Важливими із цієї точки зору є класичні ортогональні поліноми Якобі, Лагерна, Ерміта, Чебишова, Лагранжа, Гегенбауера. Властивість ортогональності цих поліномів дозволяє одержати формули вигляду (2) – (3). Введені, одним із авторів цієї роботи квазі-спектральні поліноми [1–2] теж можна використовувати в задачах, пов'язаних з кодуванням та декодуванням інформації.

Важливими агрегатами для обробки інформації є сплакни. З практичної точки зору важливими тут можуть стати так звані В-сплайни та вейвлети. Останні теж широко застосовуються для обробки сигналів та графічної інформації. Виникає питання, про те які ж згаданих базасів є найперспективнішими, а можливо існують інші більш кращі базиси.

Класична теорія поперечників дає відповіді на дані питання. За її висновками серед періодичних функцій, найкращі результати дають ряди Фур'є та породжені ними тригонометричні поліномами. Для неперіодиччних класів диференційованих функцій оптимальні результати дають алгебраїчні поліноми. Для k разів неперервно диференційованих функцій похибка кодування не перевищує c/n^k, де c не залежить від n, а n число параметрів агрегата апроксимації. Сплайни виявились оптимальними для класів W^k k разів неперервно-диференційованих функцій. Зусиллями багатьох дослідників встановлено остаточні оцінки апроксимації класами диференційованих функцій.

На жаль, при обробці графічної інформації виявилось, ця інформація моделюється Кусково-неперервними та диференційованими функціями, проте межі неперервних кусків є наперед невідомими. Значить потрібно спочатку знайти точки розриву в потоках числової інформації, які відповідають пікселям графічного екрана, а вже потім кожний кусок обробити з допомогою алгебраїчних поліномів, сплайнів чи вейвлетів.

Припустимо, на проміжку $[a,b]$ задано точки сітки x_i, $i=0,...,N$, впорядковані в порядку зростання, причому $x_0 = a, x_N = b$. Складністю даної задачі є те, що формалізувавши її ми одержуємо задачу про знаходження такого розбиття проміжка $[a,b]$ в суму n попарно неперетинних проміжків $\lfloor x_{\alpha(i)}, x_{\alpha(i+1)} \rfloor$, $i=0,...,n-1$, на кожному з яких функція $f=f(x)$ є неперервно-диференційованою k разів, де $\alpha(0)=0, \alpha(n)=N$. Тут потрібно знайти *n-1* ціло-чисельних значень функції $\alpha=\alpha(i), i=1,...,n-1$. Пошук алгоритмів, що генерують такі розбиття, є складною, притім нелінійною і повністю не розв'язаною проблемою.

Розглянемо одномірний масив a дійсного типу *float* , індекси елементів якого змінюються від 0 до N. Задаймося довільним, достатньо малим додатним числом ε, наприклад $\varepsilon = 10^{-6}$. Ця точність узгоджується із заданим дійсним типом. Приймемо $L = 0, R = N$.

Побудуємо поліном P степені d, яке є цілим числом, значно меншим N методом найменших квадратів для масиву a і одержимо масив b. Процес перетворення масиву a в масив b відповідає процесу кодування інформації за формулою типу (2). Після цього проведемо декодування, тобто перетворимо масив b у масив a_1. Порівнюючи числові масиви a, a_1 встановимо, чи відновилася інформація із заданою точністю ε. Якщо так, то задача розв'язана. А коли ні, то розділимо проміжок $[L, R]$ пополам точкою $C = (L+R)\,div\,2$ на два $[L,C]$ та $[C+1, R]$. Це відповідає поділу масиву a на два, попарно неперетинні масиви, індекси першого з яких змінюються в діапазоні $[L,C]$, а другого в діапазоні $[C+1, R]$. До першого масиву застосуємо описане вище кодування.

Якщо задана точність не досягнута, то ділимо проміжок індексів $[C, R]$ точкою $C := (L+C)\,div\,2$ на два, поки не знайдемо такий діапазон індексів, для якого кодування із заданою точністю виявиться успішним.

Якщо задана точність досягнута, то розділимо проміжок $[C,R]$ точкою $C = (C+R)\,div\,2$ на два. Для діапазону індексів $[L,C]$ спробуємо знову кодування. Якщо операція виявилась вдалою, тобто задана точність досягнута, то проміжок $[L,C]$ можна розширювати точкою $C = (C+R)\,div\,2$. І так будемо продовжувати доти, поки не знайдемо максимальний проміжок, для якого досягнемо заданої точності ε. Із наших міркувань випливає наступний алгоритм.

Алгоритм 1. $T(L,R,a,b)$**:**

$L := 0; \quad R := N; \quad C := R;$

$b := A(L,R,a); \quad a1 := B(L,R,b)$

$while \quad \big(h\big(a[L,C] - a1[L,C]\big) > \varepsilon\big)$

{

$R_p := R; R := C; C := (L+C)/2;$

$b := A(L,C,a); \quad a1 := B(L,C,b);$

}

В результаті роти алгоритму1 знайдемо такий проміжок $[L,R]$ для якого точно виконується умова апроксимації, $h\big(a[L,R] - a1[L,R]\big) < \varepsilon$, оскільки в найнесприятливішому випадку метод найменших квадратів зводиться до інтерполяції, а тоді значення у вузлах сітки відновлюються з машинною точністю. При цьому встановлено, що для проміжків $[L,C], C > R_p$ умова апроксимації не виконується. Але, для $R < C < R_p$, вона може виконуватись. Щоб розширити проміжок застосуємо наступний алгоритм:

Алгоритм 1'.

$R := R_p; \quad C := R;$

$b := A(L,R,a); \quad a1 := B(L,R,b)$

$while \quad (h(a[L,C] - a1[L,C]) > \varepsilon)$

$R = R_p$ $\{$

$Rp := R; R := C; C := (L + C)/2;$

$b := A(L,C,a); \quad a1 := B(L,C,b);$

$\}$

Так можна продовжувати поки не виконається умова $R = R_p$.

Альтернативний підхід дається алгоритмом, де q число точок інтерполяції.

$C := q - 1;$

do

$R := C; C := R + q;$

$b := A(L,C,a); \quad a1 := B(L,C,b);$

$while \quad (h(a[L,C] - a1[L,C]) < \varepsilon)$

$\}$

Щоб точніше визначити проміжок для якого умова апроксимації виконується, потрібно врахувати що правий його кінець знаходиться в межах $[R,C]$.

Сформульований алгоритм виробляє перший і найбільший діапазон, для якого кодування із заданою точністю є вдалим. Другий діапазон одержується застосуванням цього самого алгоритму, тобто його потрібно викликати в циклі. Неважко довести, що алгоритм 1 є коректним.

З наведеного вище матеріалу можна зробити висновок, що досліджена проблема оптимального кодування числової інформації, яку вигідно застосовувати, коли потрібно максимально стиснути інформацію з найменшими можливими втратами. Для апроксимації можна використовувати ряди Фурє за тригонометричною системою, чи ортогональними системами класичних ортогональних поліномів. В граничних випадках використовується середньоквадратична інтерполяція ортогональними поліномами. Оскільки, алгебраїчні поліноми степені n відновлюються точно за $n+1$, то дискретні потоки числової інформації розміром n відновлюються точно. Але в припущенні відповідної гладкості вхідної інформації може виявитись достатнім для 1024 пікселів використати код із 10 чисел. Взагалі кажучи це не так. Більш реалістичним є припущення наявності відрізків великої гладкості, початок і кінець яких є невідомими. Пошуку таких відрізків присвячені алгоритми даної роботи. Вони є ключем до побудови компютерних програм для оптимального кодування вхідних потоків числової інформації.

1. Янчук П. С. Использование А-метода при решении эллиптических и параболических уравнений / П. С. Янчук // Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов. – Киев, 1989. – С. 112–121. **2**. Янчук П. С. Квазіспектральні многочлени та крайові задачі / П. С. Янчук // Волинський математичний вісник. – 1999. – Вип. 6. – С. 183–187.