УДК 519.239.4: 37.015.3

Поліщук Віктор, ст. магістратури факультету кібернетики; науковий керівник – д ф.-м.н., професор Джунь Й. В. (Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем'янчука, м. Рівне)

СУЧАСНІ ПІДХОДИ ДО ЗАСТОСУВАННЯ ОДНОФАКТОРНОГО ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ В ПЕДАГОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Анотація. *В статті досліджено методику застосування дисперсійного аналізу в педагогічних дослідженнях, оскільки в українських джерелах з математичної статистики і аналізу даних ця методика викладена не повністю. Рекомендовано застосовувати критерій, який забезпечує контроль правильності комп'ютерних розрахунків на основі правила складання дисперсій, а також викладено особливості застосування T – методу множинних порівнянь у випадку, коли нульову гіпотезу відхилено.*
Ключові слова: *дисперсійний аналіз, критерій Бартлетта, F – критерій Фішера.*

Аннотация*. В статье изучена методика применения дисперсионного анализа в педагогических исследованиях, поскольку в украинских источниках по математической статистике и анализа данных эта методика преподавания изложена не полностью. Рекомендовано применять критерий, который обеспечивает контроль правильности компьютерных расчетов на основе правила сложения дисперсий, а также изложены особенности применения T – метода множественных сравнений в случае, когда нулевая гипотеза отклонена.*
Ключевые слова: *дисперсионный анализ, критерий Бартлетта, F – критерий Фишера.*

Annotation. *The article considers the method of application of analysis of variance in educational research, as in the Ukrainian sources on mathematical statistics and data analysis, this method of teaching is not fully. For the first time are encouraged to apply the criterion, which ensures the control of correctness of computer calculations based on the rule of addition of variances, and given the peculiarities of application of T – method of multiple comparisons in the case where the null hypothesis is rejected.*
Keywords*: analysis of variance, the Bartlett test, F – Fisher's criterion.*

Дисперсійний аналіз широко застосовується в педагогіці і психології, а також в інших галузях науки і техніки. Проте аналіз останніх досліджень, зокрема, українських навчальних та наукових джерел показує, що до цього часу цей метод не викладено належним чином та в повному обсязі. Наприклад, майже в усіх підручниках з математичної статистики, чи з аналізу даних дисперсійний аналіз закінчується на перевірці нульової гіпотези Ho. Але якщо дійсно нульова гіпотеза підтверджується, то в цьому разі головна мета дисперсійного аналізу втрачає зміст, адже цей метод призначений для випадків, коли не виконується Ho, коли досліджуються різні за ефективністю методики навчання, різні психотипи людей, різні технології чи кращий за якістю виріб. В той же час перевірка лише гіпотези Ho не дозволяє цього зробити. Це дозволяє зробити метод множинних порівнянь, який є другим етапом дисперсійного аналізу. Зазначені методи відсутні в жодному з наявних українських підручників.

Єдиним джерелом, де часково наведені методи множинних порівнянь, є книга, яка видана в радянські часи [1]. Це переведений з англійської російськомовний посібник авторів Д. Гласса та Д. Стенлі «Статистические методы в педагогике и психологии». Проте, на жаль, в цьому підручнику не висвітлені головні математичні умови, які дозволяють коректно застосовувати дисперсійний аналіз.

Метою нашої статті є викладання дисперсійного аналізу в повному обсязі із використанням критеріїв його коректного застосування.

Згідно з твердженням Ньютона, один конкретний приклад, що ілюструє метод, дає для його розуміння значно більше, ніж десятки теоретичних трактатів, що пояснюють цей метод. Тому дисперсійний аналіз і його суть ми покажемо на основі рішення досліджуваної проблеми.

Припустимо, ми маємо намір вияснити, чи розрізняються за ефективністю 4 методики вивчення курсу «Програмування». Для цього відібрано 4 групи однакових за успішністю студентів, відповідно з чисельністю $n_1 = 10$, $n_2 = 11$, $n_3 = 12$, $n_4 = 13$ студентів. Тут індекс при *n* означає номер групи. Були застосовані чотири різних методики навчання:

– перша група – вивчає предмет класичним способом аудиторного навчання, але за скороченою програмою;

– друга група – користувалася дистанційним курсом з підготовкою тезових конспектів для кожної теми;

– третя група – використовувала програмований посібник 3 курсу і виконувала на його основі персонально за варіантами студентів індивідуальні завдання;

– четверта група – вивчала предмет за допомогою навчаючого персонального компютера в діалоговому режимі. Результати іспиту з курсу «Програмування» у кожній групі наведені в табл.1.

Проблема, яку нам необхідно вирішити в результаті цього експерименту, полягає в такому: вияснити, яка із методик навчання студентів є найбільш ефективною.

Таблиця 1

Результат іспиту з курсу «Програмування» в системі ECTS для 46 студентів з різними рівнями активності (МЕГУ, 2015 рік).

N п/п	*Скорочена програма*	*N п/п*	*Дистанційне навчання з конспекту-ванням*	*N п/п*	*Програ-мований посібник*	*N п/п*	*Навчаючий ПК*
1	*26*	*1*	*51*	*1*	*52*	*1*	*41*
2	*34*	*2*	*50*	*2*	*64*	*2*	*49*
3	*46*	*3*	*33*	*3*	*39*	*3*	*56*
4	*48*	*4*	*28*	*4*	*54*	*4*	*64*
5	*42*	*5*	*47*	*5*	*58*	*5*	*78*
6	*49*	*6*	*50*	*6*	*53*	*6*	*65*
7	*74*	*7*	*48*	*7*	*77*	*7*	*63*
8	*61*	*8*	*60*	*8*	*56*	*8*	*87*
9	*51*	*9*	*71*	*9*	*63*	*9*	*77*
10	*53*	*10*	*42*	*10*	*59*	*10*	*63*
		11	*80*	*11*	*77*	*11*	*72*
				12	*90*	*12*	*55*
						13	*38*
1 група		*2 група*		*3 група*		*4 група*	

Може здивувати, чому ми застосовуємо для вирішення цієї проблеми дисперсійний аналіз, адже, здавалося б, для її вирішення достатньо визначати середні бали з предмету в чотирьох групах. Та методика, яка дасть найбільший середній бал, здавалось би, і є найкращою за ефективністю. Але такий підхід є обмеженим і ненауковим, оскільки нас цікавить не тільки результати, отримані для конкретних студентів в МЕГУ. Яка користь від нашого дослідження, якщо ми скажемо лише, що якась група із n_j студентів факультету кібернетики МЕГУ краща від групи з n_{j+1} студентів? Для того, щоб експеримент був внеском у науку, наш інтерес має бути направлений на всю генеральну сукупність студентів усіх факультетів кібернетики України. Іншими словами, нас цікавить, чи можемо ми чекати такого ж результату для 46 студентів в Київському національному університеті імені

Т. Шевченка чи Харківському національному університеті імені Каразіна чи в будь-якому іншому ВНЗ. А щоб дати відповідь на це питання і зробити висновок відносно всієї генеральної сукупності студентів України, потрібно застосувати дисперсійний аналіз. Цей метод призначений для формування статистичних висновків щодо гіпотетичної генеральної сукупності даних, в якості яких виступають 46 наших вибіркових результатів.

Поставимо тепер питання про ефективність чотирьох методик навчання в більш точних наукових термінах. З цією метою ми припускаємо, що будь-який із 46 результатів може бути представлений лінійною моделлю:

$$y_{ij} = \mu + d_j + e_{ij} \ , \tag{1}$$

де y_{ij} – оцінка і-того студента в j-тій групі; μ – загальна середня оцінка по всім 46 результатам; d_j – середня оцінка в групі j, яка залежить від методики навчання; e_{ij} – похибка лінійної моделі.

Ми повинні пам'ятати, що μ, d_j, e_{ij} – це числа. Увесь наш інтерес в d_j;

μ – для нас малоцікаве.

Дисперсійний аналіз завжди починають з перевірки гіпотези H_0:

$$H_0 : d_j = d_j = d_j = d_j, \tag{2}$$

Якщо гіпотеза H_0 відхиляється то приймають альтернативну гіпотезу H_a:

$$H_a: \text{принаймні якась } d_j \neq d_j \tag{3}$$

Але одна з основних помилок, яку допускають при перевірці цих гіпотез, полягає в тому, що перш ніж це почати, потрібно перевірити дві наступні головні математичні умови застосування дисперсійного аналізу:

1. Дисперсії оцінок в кожній групі мають бути однакові;
2. Розподіл оцінок в кожній групі має підкорятись нормальному закону.

На жаль, навіть в сучасних програмних продуктах за «ANOVA», а саме так означені за кордоном ці продукти з дисперсійного аналізу, відсутні необхідні додатки для перевірки зазначених вище умов 1 і 2. Тому при застосуванні дисперсійного аналізу ми рекомендуємо включити в «ANOVA» два додатки.

Перший – перевірка головної умови застосування дисперсійного аналізу на основі використання М – статистики Бартлетта:

$$M = Nln\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k} \vartheta_i S_j\right) - \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j lnS_j^2 < M_{kp,\varphi,k,c}, \qquad (4)$$

де $N = \sum_{j=1}^{k}(n_j - 1) = \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j$; n_j – число студентів в *j*-тій групі;

$S_j^2 = \sum_{j=1}^{k} (y_{ij} = \bar{y}_j)^2 / (n_j - 1)$; $\bar{y}_j$- середній бал в *j*-тій групі;

$M_{kp,\varphi,k,c}$ – критичне значення М – статистики Бартлетта, яке вибирається із таблиць критерію Бартлетта в залежності від рівня ризику

φ, числа груп *k* і від $c_1 = \sum_{j-1}^{k} \frac{1}{\vartheta_j} - \frac{1}{N}$.

Головна умова, виконання якої необхідно для застосування дисперсійного аналізу, вважається виконаною, якщо буде підтверджена нерівність (4).

Перевірка другої фундаментальної вимоги дисперсійного аналізу здійснюють за допомогою *d* – статистики:

$$d_j = \frac{1}{n_j s_j}\sum_{i=1}^{n_j}\left|y_{ij} - \bar{y}_j\right|. \qquad (5)$$

де $\bar{y}_j$ – середній бал у *j*-тій групі; y_{ij} – оцінки у *j*-тій групі;

$$s_j = \sqrt{\left(y_{ij} - \bar{y}_j\right)^2 / n_j} \ ;$$

n_j – число студентів у *j*-тій групі; Статистика d_j обчислюється для кожної групи.

Друга умова дисперсійного аналізу вважається виконаною, якщо кожна d_j статистика (5) попаде в інтервал 5–95 % (табл. 2).

Таблиця 2

Критичні 5 % і 95 % значення *d* – статистики

n_j	$d_{5\%}$	$d_{95\%}$
10	0.9311	0.7136
11	0.9073	0.7153
12	0.9035	0.7170
13	0.8997	0.7186
14	0.8960	0.7203
15	0.8922	0.7219
16	0.8884	0.7236

Друга умова вважається виконаною, якщо, наприклад, при $n_j = 10$; *d*–статистика (5) попаде в середину інтервалу 0.9311 – 0.7136.

В ідеальному випадку *d* – статистика має бути рівною $\sqrt{2 / \pi}$. Після того як умови 1 і 2 підтвердяться, обчислюють основні співвідношення дисперсійного аналізу:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{k} \left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{k} y_{ij} - n\bar{y}^2 \qquad (6)$$

$$Q_1 = \sum_{j=1}^{k} n_j \left(\bar{y_j} - \bar{y}\right)^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j \bar{y_j}^{\,2} - n\bar{y}^2 \qquad (7)$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{k} \left(y_{ij} - \bar{y_j}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{k} y_{ij}^{\,2} - \sum_{j=1}^{k} n_j \, \bar{y_j}^{\,2}, \qquad (8)$$

де $n = \sum_{j=1}^{k} nj$; $\bar{y_j}$ – середній бал в *j*-тій групі; – загальна середня $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{k} y_{ij} / n$.

На превеликий жаль в програмному продукті «ANOVA» не вказана мета, для якої потрібно обчислювати суми (6–8). Ці суми необхідно обчислювати з метою контролю правильності обчислень, виконаних на комп'ютері. Вважають, що розрахунки виконані правильно, якщо виконуються умова:

$$Q = Q_1 + Q_2 \, . \qquad (9)$$

Після перевірки рівності (9) обчислюються основні співвідношення дисперсійного аналізу за формулами:

$$S_1^2 = Q_1/(k-1)\,; \qquad (10)$$

$$S_2^2 = Q_2/(k-1)\,; \qquad (11)$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{kp,\varphi,k_1,k_2}, \qquad (12)$$

де F_{φ,k_1,k_2} – критичне значення F – відношення Фішера, яке знаходять з таблиць розподілу Фішера для рівня значущості φі ступенів вільності:

$$k_1 = k - 1 \text{ і } k_2 = n - k \quad (13)$$

У випадку відхилення гіпотези H_0 застосовують T –метод множинних порівнянь, суть якого описана в роботі [1]

Узагальнюючи результати проведеного дослідження, варто зазначити, що в статті вперше обгрунтовано важливість застосування сучасних схем дисперсійного аналізу із застосуванням Т – методу множинних порівнянь і наведені критерії, які дозволяють перевірити фундаментальні умови, закладені в основу дисперсійного аналізу.

1. Гласс Д. Статистические методы в педагогике и психологи / Д. Гласс, Д. Стенли. – М. : Прогресс, 1976. – 478 с. **2.** Шеффе Г. Дисперсионный аналіз / Г. Шеффе. – М. : Наука, 1965. – 510 с**.** **3.** Большев Л. Таблицы математической статистики / Л. Большев, Н. Смирнов. – М. : ВЦ АН СССР, 1983. – 412 с.