

*доцент кафедри математичного моделювання
Міжнародного економіко-гуманітарного університету
імені академіка Степана Дем'янчука, к.т.н.*

ОНТОДИДАКТИКА ПОЛІНОМІАЛЬНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Анотація. В даній роботі розглядається новий підхід до подачі матеріалу по темі "Поліноміальна апроксимація", розробляються необхідні контролі і повна оцінка точності зрівноважених елементів, приводяться практичні результати по розробленому автором алгоритму в MS EXCEL

Ключові слова: онтодидактика-поліноміальна апроксимація

Аннотация. В данной работе рассматривается новый подход к подаче материала по теме "Полиномиальная аппроксимация", разрабатываются необходимые контроли и полная оценка точности уравновешенных элементов, приводятся практические результаты по разработанному автором алгоритму в MS EXCEL

Ключевые слова: онтодидактика-полиномиальная аппроксимация
Annotation. In this work the new going is examined near the serve of material on the topic "Polynomialna approximation", necessary controls and complete estimation of exactness of the balanced elements are developed, practical results over are brought on the algorithm developed an author in MS EXCEL

Key words: ontodidaktik-polynomial appksimation.

Постановка проблеми досліджень. За результатами педагогічного експерименту при дослідженні залежності якості здачі екзамену у бальній системі по шкалі ECST і числа студентів, які отримали той чи інший бал, будується математична модель у вигляді поліному третього степеня.

Вихідними даними для проведення досліджень в даній роботі беруться результати педагогічного експерименту - екзаменаційні бали (X_i) і число студентів, які отримали той чи інший бал (Y_i). За цими даними була побудована математична модель у вигляді поліному першого степеня способом найменших квадратів. Дана модель приймалась за істинну модель. В подальшому генеруються випадкові числа, знаходяться коефіцієнти пропорційності K і дані випадкові числа приводяться до середньої квадратичної похибки 0,5 бали, на яку міг помилитися викладач.

Будуються спотворені моделі, які зрівноважуються по способу найменших квадратів. Дається оцінка точності елементів, зрівноважених процедурою способу найменших квадратів. Робляться узагальнюючі висновки.

1. Теоретико-методологічні аспекти онтодидактичного підходу представлення поліноміальної апроксимації.

Слово "онтодидактика" означає наставляння ("дидактика") по суті ("онто"). Суть же онтодидактичних прийомів в тому, що знаходяться більш прості або більш короткі методи подачі вже усталеного теоретичного матеріалу.

Знаходження цих нових методів процес не простий і потребує постійної "налаштованості" на бажання покращити, вдосконалити подачу матеріалу.

В даній роботі розглядається новий підхід до подачі матеріалу по темі "Поліноміальна апроксимація", розробляються необхідні контролі і повна оцінка точності зрівноважених елементів, приводяться практичні результати по розробленому автором алгоритму в MS EXCEL.

1. Знаходиться матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь N

$$N = \begin{matrix} & \begin{matrix} X \\ \text{mxm} \end{matrix} & \begin{matrix} X^T \\ \text{mxn nxm} \end{matrix} \end{matrix}, \quad (1)$$

де X^T - транспонована матриця коефіцієнтів початкових умовних рівнянь X .

2. Визначається обернена матриця Q

$$Q = N^{-1} \quad (2)$$

$m \times m \quad m \times m$

3. Обчислюється вектор вільних членів b

$$b = Y X^T \quad (3)$$

$1 \times m \quad 1 \times n \quad n \times m$

4. Вчислюється вектор невідомих a

$$a = b Q \quad (4)$$

$1 \times m \quad 1 \times m \quad m \times m$

5. Виконується контроль обчислень

$$b = a N \quad (5)$$

$1 \times m \quad 1 \times m \quad m \times m$

6. Знаходиться вектор зрівноважених значень Y'

$$Y' = a X \quad (6)$$

$1 \times n \quad 1 \times m \quad m \times n$

7. Обчислюється середня квадратична похибка (стандарт) одиниці ваги μ (мю)

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n V_i V_i}{n - m - 1}} \quad (7)$$

$1 \times n \quad n \times 1$

де

$$V = Y' - Y \quad (8)$$

$1 \times n \quad 1 \times n \quad 1 \times n$

8. Знаходяться обернені ваги коефіцієнтів апроксимуючого поліному, як діагональні елементи оберненої матриці Q

$$\frac{1}{P_{aj}} = Q_{jj}, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, m) \quad (9)$$

9. Їх стандарти (середні квадратичні похибки)

$$\sigma_{ai} = \sigma_0 \sqrt{\frac{1}{P_{ai}}} \quad (10)$$

де

$$\sigma_0 = \mu \quad (11)$$

10. Знаходиться допоміжна матриця

$$Q' = Q X \quad (12)$$

$m \times n \quad m \times m \quad m \times n$

11. Обчислюється обернена вага функції зрівноважених величин як добуток двох векторів построчно

$$\frac{1}{Py'} = X' Q' \quad (13)$$

$1 \times 1 \quad 1 \times m \quad m \times 1$

12. Розраховуються стандарти зрівноваженої функції

$$\sigma_{Y'} = \sigma_0 \sqrt{\frac{1}{P_{Y'}}}. \quad (14)$$

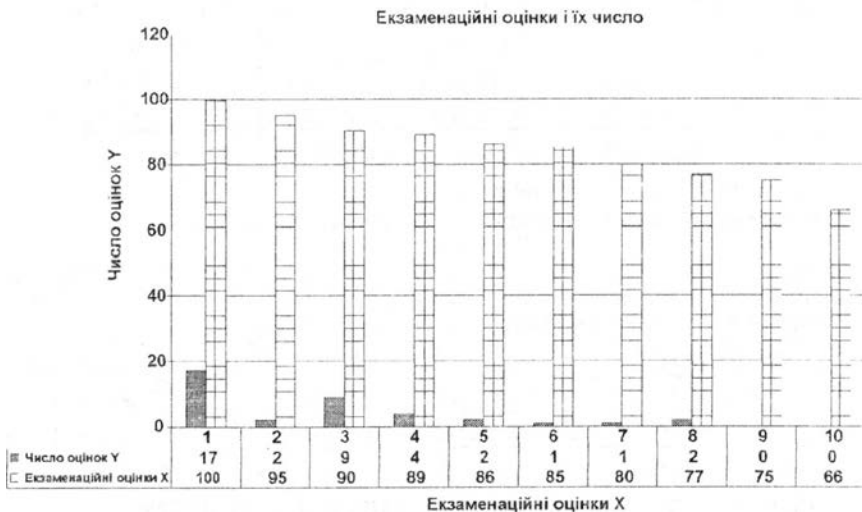
2. Представлення результатів експериментальних даних
За результатами курсового екзамену отримана наступна таблиця

Таблиця 1

Результати курсового екзамену

№ п/п	Екзаменаційні оцінки (X) (бали по шкалі EST)	Кількість студентів (Y)
1	100	17
2	95	2
3	90	9
4	89	4
5	86	2
6	85	1
7	80	1
8	77	2
9	75	0
10	66	0
	843	38

Проілюструємо результати екзамену графічно



3. Встановлення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Проведемо апроксимацію результатів екзамену кубічним поліномом.
Таблиця коефіцієнтів початкових рівнянь при цьому буде

Таблиця 2

Коефіцієнти початкових рівнянь

X0	X	X ²	X ³
1	100	10000	1000000
1	95	9025	857375
1	90	8100	729000
1	89	7921	704969
1	86	7396	636056
1	85	7225	614125
1	80	6400	512000
1	77	5929	456533
1	75	5625	421875
1	66	4356	287496
10	843	71977	6219429

За формулою (1) знайдемо матрицю коефіцієнтів нормальних рівнянь.

Враховуючи особливості вбудованої в MS EXCEL програми множення матриць, за комп'ютерною формулою

=МУМНОЖСТРАНСП(A81: D90);A81: D90)),

виділивши попередньо масив, аналогічний масиву (A81:D90), в якому знаходилася матриця коефіцієнтів початкових рівнянь (див. табл.2), натиском клавіш F2, "Ctrl+Shift+Enter", отримуємо матрицю коефіцієнтів нормальних рівнянь

10	843	71977	6219429
843	71977	6219429	543432709
N= 71977	6219429	543432709	47977055733 (15)
6219429	543432709	47977055733	4.27643E+12

4. Рішення системи лінійних рівнянь

Обернена матриця Q знаходиться за комп'ютерною формулою

=МОБР(F81:184), (16)

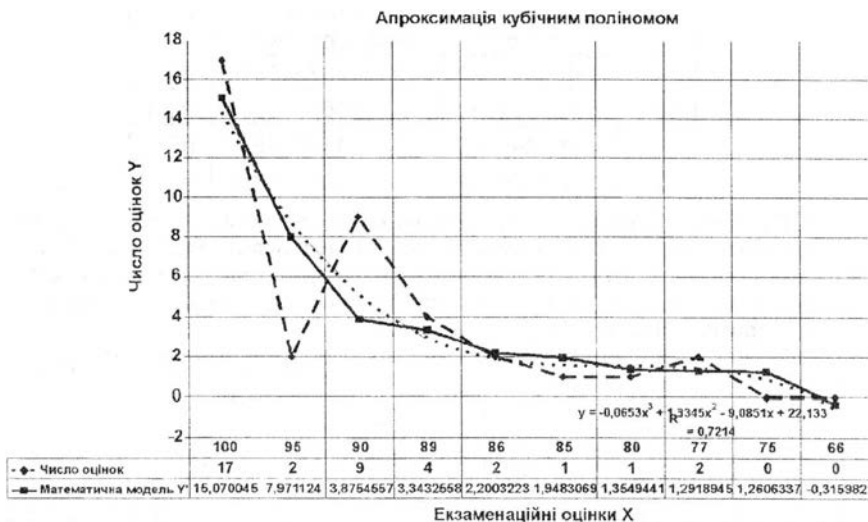
виділивши попередньо масив, аналогічний масиву (F81:184) в якому знаходилася матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь (15), натиском клавіш F2, "Ctrl+Shift+Enter", отримуємо обернену матрицю Q=N-1

Q=	31823,74352	-1169,11728	14,16301309	-0,056609982
	-1169,11728	43,02061433	-0,521978605	0,00208946
	14,16301309	-0,521978605	0,006342885	-2,54274E-05
	-0,056609982	0,00208946	-2,54274E-05	1,02079E-07

Розраховується визначник оберненої матриці D за формулою

=МОПРЕДР87:190), (18)

Необхідно зауважити, що виписана формула на графіку залежить від масштабування комп'ютером, яке він проводить на свій розсуд і не представляє ніяких даних про коефіцієнти масштабування. Тому, коректною і точною є аналітична формула (21), яка і не співпадає з формулою, представленою на графіку.



Вектор невідомих, за формулою (4), буде

$$= \text{МУМНОЖ}(\text{E87:I90}; \text{E94:E97}) \quad (19)$$

І в нашому випадку

$$a = \begin{bmatrix} -507,8865465 \\ 19,81315404 \\ -0,257133688 \\ 0,001112978 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Таким чином, нами отримана емпірична формула прогнозу числа студентів, які при заданих умовах отримають відповідний бал за шкалою ECST

$$Y' = 0,00111X^3 - 0,25713X^2 + 19,81315X - 507,88655 \quad (21)$$

Висновки.

На основі проведених в даній роботі досліджень

1. Проведений онтодидактичний підхід до питання поліноміальної апроксимації функцій. При цьому не тільки розроблений алгоритм реалізації на основі матричного числення, але і повного аналізу з оцінкою точності зрівноважених елементів за способом найменших квадратів.

2. На конкретному експериментальному матеріалі будується математична модель у вигляді емпіричної формули

$$Y' = 0,00111X^3 - 0,25713X^2 + 19,81315X - 507,88655,$$

і доказується значимість коефіцієнтів даної формули.

3. Отримані обернені ваги і середні квадратичні похибки коефіцієнтів формули

$$Y' = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

	Обернені ваги	Середні квадр. похибки	
1/pd	31823,74352	254,7345834	m(d)
1/pc	43,02061433	9,365922955	m(c)
1/pb	0,006342885	0,113724938	m(b)
1/pa	1.02079E-07	0,000456227	m(a)

4. Встановлена середня квадратична похибка одиниці ваги $c = 1,4279$.

5. Приймаючи до уваги, що критерій Фішера-Снедекора $F > F(0.05; 3; 34) 3$ надійністю 95% можна вважати, що коефіцієнт детермінації статистично значимий і включені в регресію фактори достатньо пояснюють стохастичну залежність показника.

6. Отримані наступні результати

Обернені ваги і середні квадратичні похибки зрівноваженої функції

№	• ^а експер.	Уекспер.	зрівноваж	√1/P	гткр
1	100	17	15,0700	0,944	1,348
2	95	2	7,9711	0,546	0,780
3	90	9	3,8754	0,512	0,731
4	89	4	3,3432	0,495	0,707
5	86	2	2,2003	0,438	0,625
6	85	1	1,9483	0,425	0,607
7	80	1	1,3549	0,487	0,696
8	77	2	1,2918	0,574	0,820
9	75	0	1,2606	0,615	0,879
10	66	0	-0,3159	0,991	1,415
p=10	843	38	38,00		

7. Результати досліджень впроваджені в курси "Основи наукових досліджень" і "Педагогіка вищої школи" МЕТУ.

Літературні джерела

1. Андрощук Л.М. Побудова і дослідження математичної моделі якості засвоєння базової дисципліни методом статистичних випробувань МонтеКарло. Апроксимація поліномом першого степеня. Модель ППП 81 95. МЕТУ, Рівне, 2009. -44 с.

2. Літнарівич Р.М. Теоретико-методологічні аспекти і базові принципи функціонування наукової школи в рамках професійної освіти. Монографія. МЕТУ, Рівне. - 383 с.

3. Літнарівич Р.М. Побудова і дослідження істинної моделі якості засвоєння базової дисципліни. Апроксимація поліномом першого степеня.. МЕТУ, Рівне, 2009. -32с.

4. Літнарівич Р.М. Основи математики. Дослідження результатів психолого-педагогічного експерименту експоненціальною функцією. Частина 4. МЕТУ, Рівне, 2006. -17с.

5. Літнарівич Р.М. Основи математики. Дослідження результатів психолого-педагогічного експерименту степеневою функцією. Частина 5. МЕТУ, Рівне, 2006,- 17с.

6. Літнарівич Р.М. Дослідження точності апроксимації результатів психолого-педагогічного експерименту методом статистичних випробувань Монте Карло.4.1 .МЕТУ, Рівне, 2006,-45с.

7. Максименко С.Д., Е.Л. Носенко Експериментальна психологія (дидактичний тезаурус). Навчальний посібник -К.: МАУП, 2004, -128 с.

8. Якимчук А.Й.. Побудова і дослідження математичної моделі якості засвоєння базової дисципліни методом статистичних випробувань Монте Карло. Множинний регресійний аналіз. Модель ДА - 50 МЕТУ, Рівне, 2009, -72 с.