УДК 378.147

МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ НА ОСНОВІ ДОДАТКУ SIMULINK ПАКЕТУ MATLAB

Петро Янчук,
Юрій Лотюк

Міжнародний університет "РЕП" імені академіка Степана Дем'янчука

При математичному вивченні різних явищ природи, фізичних, хімічних, технічних, або будь-яких інших процесів не завжди можна встановити пряму залежність між величинами, які характеризують той чи інший процес Якщо ми володіємо належною інформацією про перебіг процесу, який вивчається, то, беручи до уваги деякі припущення щодо зв'язків між основними визначальними параметрами процесу і зовнішнім середовищем, можливо створити спрощену схему, або математичну модель процесу.

Створення математичної моделі — один з найважливіших етапів пізнання, оскільки на цьому етапі ми проникаємо в структуру явища, виявляємо його характерні особливості та внутрішні зв'язки, досліджуємо перебіг процесу при зміні його визначальних параметрів.

Згідно Програми для загальноосвітніх навчальних закладів з математики 5-11 класи, затвердженої Міністерством освіти і науки України, у програмі з алгебри для 9-го класу передбачається у розділі № IV (Елементи прикладної математики) "Ввести поняття про математичне моделювання. Розглянути загальну задачу математичного моделювання, проілюструвати прикладами". Серед умінь, які мають бути сформовані, перераховані уміння "складати моделі до прикладних задач та розв'язувати їх".

Математична модель процесу може мати різну структуру. Більшість математичних моделей можна розбити на такі два великі класи: математичні, або аналітичні моделі; імітаційні, або системні моделі [5]. В математичних моделях здебільшого використовуються аналітичні методи — апарат математичного аналізу, або інших розділів математики. У імітаційних моделях застосовуються можливості теорії ймовірностей та випадкових процесів. Як правило, моделі другого класу потребують значно більших машинних ресурсів, тобто для їх реалізації потрібні сучасні комп'ютери. Інколи, важко провести межу між цими класами моделей.

При побудові аналітичної моделі отримується диференціальне рівняння, одним із розв'язків якого є шукана функціональна залежність між основними характеристиками процесу. Щоб з нескінченої множини розв'язків виділити розв'язок, який описує саме розглядуваний процес, потрібно знати початковий стан процесу (або крайові умови в інших моделях), тобто мати додаткову інформацію у вигляді початкової умови. Таким чином, задача зводиться до задачі Коші. При побудові імітаційної моделі відбувається комп'ютерна імітація процесу, значення основних параметрів процесу перераховуються для кожного моменту модельного часу, який задається дискретно.

Якість математичної моделі, як і кожного з прийнятих припущень при її побудові, оцінюється дослідом та спостереженнями. Якщо теоретичні висновки, зроблені на базі створеної математичної моделі, підтверджуються на практиці, модель явища приймається, у іншому випадку необхідно проводити уточнення моделі [2].

Після прийняття Програми почали з'являтися публікації [1,3], де розглядаються теоретичні відомості та правила побудови математичних моделей. В переважній більшості випадків автори обмежуються математичним описом моделі та отриманням загального диференціального рівняння, яке описує процес, що моделюється. У деяких публікаціях побудова моделі на цьому не завершується і автор наводить комп'ютерну програму для обрахунку моделі на комп'ютері. Так у [1] пропонується програма мовою Turbo Pascal. Проте, використання мови програмування примушує або спрощувати модель, або витрачати на розгляд теми додатковий час. Наприклад, вчитель на уроці вводить поняття моделі та отримує диференціальне рівняння, що описує процес, але

програмування моделі, налагодження програми та дослідження моделі проводиться в позаурочний час — на заняттях математичного гуртка, або факультативі.

З появою математичних пакетів відпала необхідність програмувати кожну елементарну операцію. Тепер учень, або студент може конструювати модель безпосередньо мовою предметної галузі: математики, фізики, біології тощо. Це дозволить, не заглиблюючись у програмування, коли часто за програмуванням не видно математичної суті задачі, зосередити всю увагу на дослідженні задачі. З'являється можливість зекономити час при проведенні лабораторних занять, та зробити процес навчання більш наочним та вмотивованим. Так, знаходячись у додатку SIMULINK пакету MATLAB для моделювання, оперуємо більш загальними поняттями — затримка сигналу, передаточна функція, екстраполятор, концентратор, розподілювач та інші.

Найкращим додатком для побудови та дослідження математичних моделей є сучасна версія системи MATLAB (МАТрична ЛАБораторія), розроблена американською компанією *The MathWorks, Inc.* (м. Натіке штату Массачусетс, США) [4].

MATLAB — це сучасне математичне середовище для професійної роботи у математичних, інженерних, та інших застосуваннях. MATLAB є інтерактивною системою, за допомогою якої можна у діалоговому режимі створювати та підлагоджувати програми довільної складності, при чому запис математичних виразів наближений до форми прийнятої у математиків.

Важливою складовою частиною пакету є додаток SIMULINK призначений для створення динамічних моделей: дискретних, неперервних та гібридних. Такі моделі можуть відображати основні предмети дослідження — системи управління, обробка сигналів, обробка зображень, аеродинамічні моделі, моделі електронних схем тощо.

Робота у середовищі SIMULINK починається із запуску SIMULINK під керуванням MATLAB. Користувач конструює досліджувану схему з блоків графічної бібліотеки SIMULINK, користуючись технологією' Drag and Drop. Після побудови схеми використовуються підпрограми, що реалізують у чисельному або графічному вигляді алгоритми обробки або аналізу заданої схеми.

Відкрита архітектура SIMULINK дозволяє розширювати засоби моделювання, тобто створювати бібліотеки блоків користувача з іконками, створювати інтерфейс користувача з MATLAB, Fortran або С-програмами.

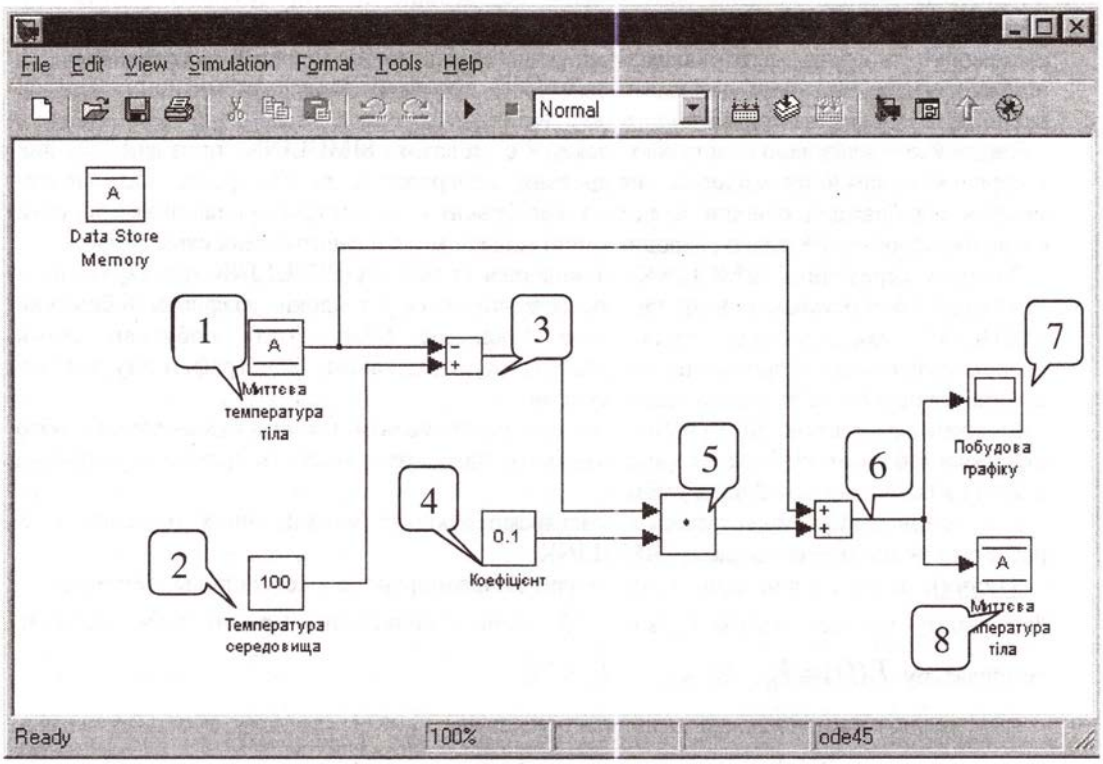
Для демонстрації вищесказаного розглянемо декілька математичних моделей та їх реалізації за допомогою додатку SIMULINK.

Задача 1. Знайти закон зміни температури тіла, зануреного в середовище, температура якого підтримується сталою і рівною *Q,* якщо в початковий момент часу тіло мало температуру **Т(О)=Г₀,** $т_0$<2, $т_о$ = 2О.

Розв 'язування аналітичним методом: Оскільки T_Q < *Q,* то тіло буде нагріватися. Позначимо через Т(г), температуру тіла в момент часу *t.* Згідно з законом Ньютона, швидкість охолодження пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища, тобто $\frac{dT}{dt} \sim K(Q—T)$, *не К* — коефіцієнт пропорційності. Одержане рівняння є диференціальним рівнянням задачі. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержимо 1п]Т" — <2| = ~*Kt* + In *C,* де *С*— деяка стала. Звідки $T — Q + Ce^{-K'}$. Використовуючи початкову умову Т(0)=7', знайдемо сталу інтегрування С = T_o — *Q.* Шуканий закон зміни температури тіла виражається залежністю $T = Q + (T.-Q)e^{-Kt}$.

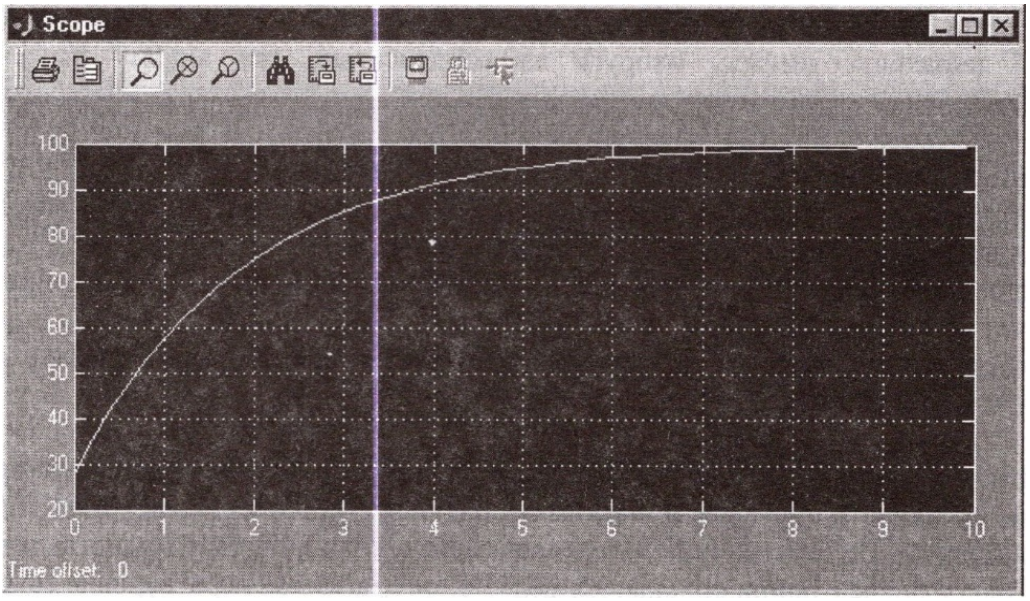
Побудова імітаційної моделі. Введемо змінну, у якій будемо зберігати поточну температуру тіла, змінна буде зберігатися у об'єкті Data store memory. При кожному значенні дискретного модельного часу будемо проводити наступні обчислення:

1. Обрахуємо різницю температури середовища та температури тіла: блок2—константа, що зберігає температуру середовища, блокі—миттєва температура тіла, блок3—обчислення різниці. На виході блоку3 маємо різницю температур *Q — T;*
2. Блок4—коефіцієнт теплопровідності, блок5—обчислення добутку. На виході блоку5 маємо *K{Q-T} ;*
3. Блокб сумує миттєву температуру та приріст температури за одиницю модельного часу;
4. Блок8 здійснює запис миттєвого значення температури тіла у змінну;
5. Блок? призначений для візуалізації зміни температури тіла, що нагрівається.



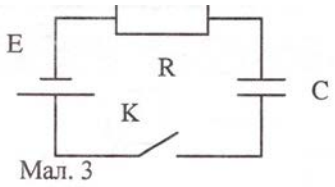
Мал.1. Реалізація засобами SIMULINK математичної моделі задачі 1.

Порівнюючи аналітичну та імітаційну моделі, бачимо, що хоча аналітична модель є більш точною (отримана функціональна залежність між часом та температурою тіла), проте імітаційна модель є більш наочною. Також простіше проводити дослідження явища теплопередачі на імітаційній моделі. Звісно учню, або студенту молодшого курсу простіше розібратися з Мал. 1,



Мал.2. Вивід блока7 з мал.1—графік зміни температури тіла.

Задача2. Дослідження процесу зарядки конденсатора. У електричному колі, зображеному на мал. 3, при замиканні ключа К через резистор R та конденсатор С починає протікати струм, заряджаючи конденсатор. Із збільшенням заряду конденсатора струм стає дедалі меншим, і при повному заряді конденсатора припиняється. Потрібно встановити закон зміни величини струму від часу.



Мал. 3

Аналітично дана схема описується такою системою рівнянь:

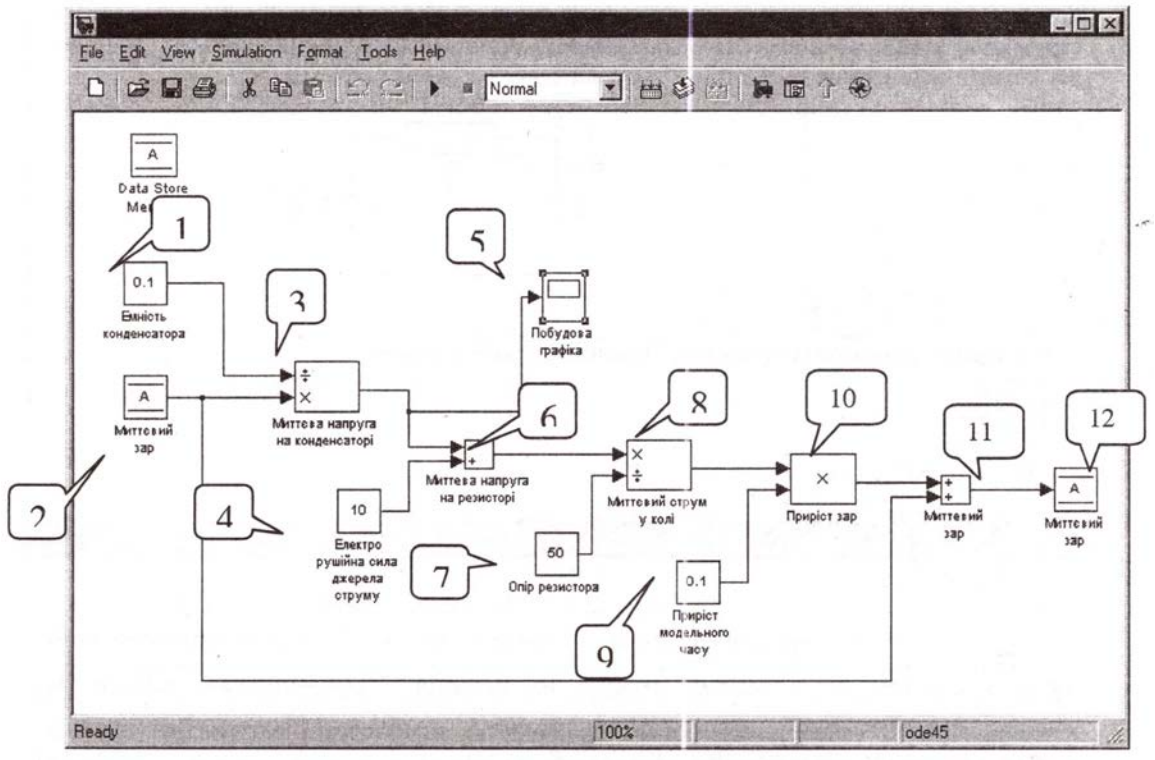
$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = I \\ E = U_R + U_C \\ U_R = I * R \\ U_C = \dfrac{Q}{C} \end{cases},$$

де Q—миттєвий заряд конденсатора, t—модельний час, E—електрорушійна сила джерела струму, U_R—миттєва напруга на резисторі, U_C—миттєва напруга на конденсаторі, C—ємність конденсатора, R—опір резистора, I—миттєвий струм у колі.

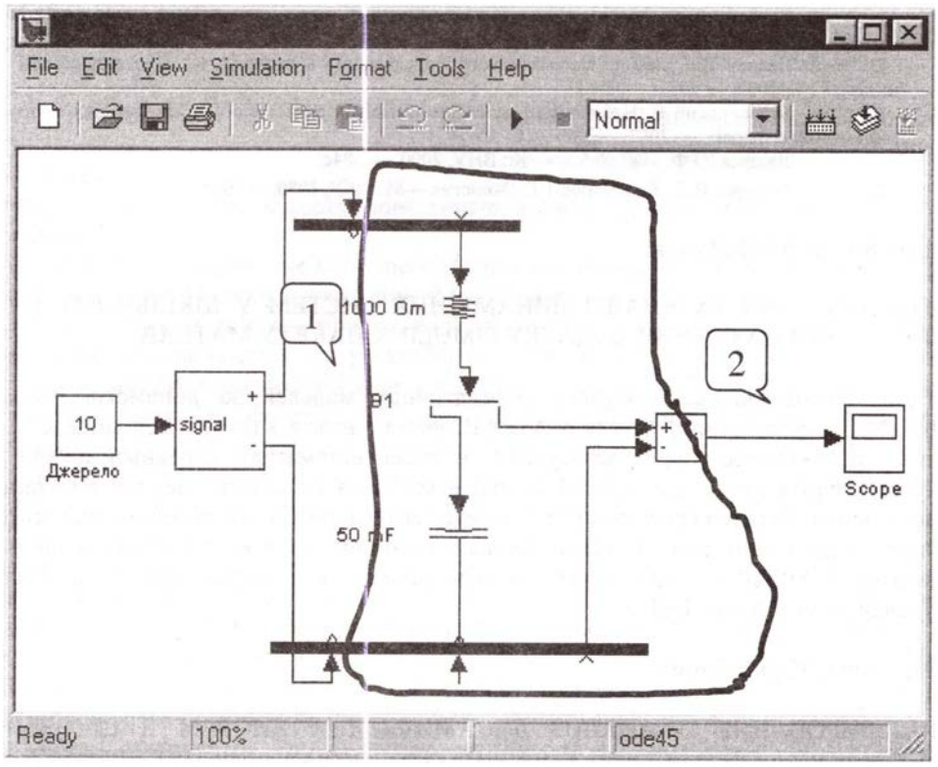
Побудуємо імітаційну модель даної схеми: введемо змінну, у якій будемо зберігати поточний заряд конденсатора, змінна буде зберігатися у об'єкті Data store memory. При кожному значенні дискретного модельного часу будемо проводити наступні обчислення:

1. Константа блокі містить ємність конденсатора, змінна блоку2— миттєвий заряд, блок3 вираховує миттєву напругу на конденсаторі, яка відразу візуалізується блокомб;
2. Блокб обраховує миттєву напругу на резисторі як різницю між електрорушійною силою джерела струму та миттєвою напругою на конденсаторі;
3. Знаючи миттєву напругу на резисторі та опір резистора (блок7), обраховуємо миттєвий струм у колі;
4. Знаючи миттєвий струм у колі та приріст модельного часу (блок9), обраховуємо приріст заряду конденсатора;
5. Блокі 1 сумує вже наявний у конденсатора заряд та приріст заряду, отримане значення записується у змінну (блок12).

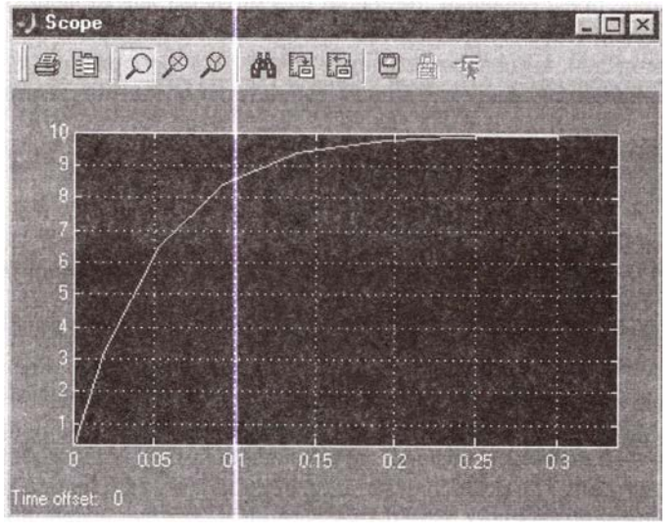
Треба відмітити, що хоча SIMULINK має потужні можливості для моделювання систем будь-якої складності, проте для моделювання радіоелектронних систем у SIMULINK є спеціальні блоки. Не зачіпаючи деталей, продемонструємо побудову моделі задачі 2 за допомогою радіоелектронних блоків. На мал. 5 блокі здійснює перетворення модельного значення величини типу double у величину напруги. Обведена ділянка є радіосхемою (де побудова моделі відрізняється від побудови у основній схемі), блок2 здійснює зворотне перетворення. Візуалізація здійснюється звичайним чином. На мал. 6 показаний графік залежності напруги на конденсаторі від модельного часу.



Мал.4. Реалізація засобами SIMULINK математичної моделі задачі 2.



Мал.5. Реалізація засобами SIMULINK (DSP) математичної моделі задачі 2.



Мал. 6. Графік залежності напруги на конденсаторі від модельного часу для задачі 2.

ЛІТЕРАТУРА

1. Глинський Я. Моделювання // “Інформатика” видавництва “Шкільний світ” (Перше вересня). 2001. — №47 (143). — С. 3-4.
2. Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології. К.: Видавничий дім “КМ Академія”. — 2002. — 193с.
3. Булавицький В. Найпростіші математичні моделі екологічних та біологічних процесів // “Математика в школі”. — 2002. — №5. — С. 52-54.
4. Лазарев Ю.Ф. MatLab 5.x. — К.: BHV, 2000. — 384с.
5. Федоров В.Д., Гильманов Т.Г. Экология.—М.:МГУ, 1980.— 464с.

Петро Янчук, Юрій Лотюк

МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ НА ОСНОВІ ДОДАТКУ SIMULINK ПАКЕТУ MATLAB

У статті розглядається побудова математичних моделей за допомогою додатку SIMULINK математичного пакету MATLAB. Розглядається класифікація моделей та їх педагогічні можливості при застосуванні у курсі математики середньої школи або молодших курсів вузів. Для кожної моделі наводиться як аналітичне, так і імітаційне представлення. Детально розглянуті дві моделі: нагрівання тіла та зарядки конденсатора. Наводиться детальний опис функціонування імітаційних моделей вищезазначених явищ у додатку SIMULINK. Для другої моделі проводиться порівняння з професійно побудованою моделлю у DSP.

Пётр Янчук, Юрий Лотюк

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ИСПОЛЬЗУЯ ПРИЛОЖЕНИЕ SIMULINK ПАКЕТА MATLAB

В статье рассматривается построение математических моделей с помощью приложения SIMULINK математического пакета MATLAB. Рассматривается классификация моделей и их педагогические возможности при использовании их в курсе математики средней школы или младших курсов вузов. Для каждой модели приводится как аналитическое, так и имитационное представление. Детально рассмотрены две модели: нагревания тела и зарядки конденсатора. Приводится детальное описание функционирования имитационных моделей вышеперечисленных явлений в приложении SIMULINK. Для второй модели приводится сравнение с профессионально построенной моделью в DSP.

Peter Janchuk, Yurij Lotyuk

MODELLING AND ANALYSIS OF DYNAMIC SYSTEMS IN A SCHOOL RATE OF MATHEMATICS USING APPENDIX SIMULINK OF A PACKAGE MATLAB

In the article the construction of mathematical models with the help of appendices SIMULINK of a mathematical package MATLAB is considered. The classification of models and their pedagogical possibilities for want of use them in a rate of mathematics of high school or junior rates of high schools is considered. For each model is resulted both analytical, and imitative submission. Two models detailed: are considered: heatings of a skew field and charging of the condenser. The detailed description of operation of simulation models of the set forth above phenomena in appendix SIMULINK is resulted. For the second model the comparison with a professionally constructed model in DSP is resulted.