УДК 519.6

КУСОЧНО-МНОГОЧЛЕННІ НАБЛИЖЕННЯ І КВАЗІСПЕКТРАЛЬНІ МНОГОЧЛЕНИ

Янчук П.С.

Міжнародний університет “РЕП” імені академіка Степана Дем’янчука

Відомо, яку значну роль відіграють формули та ряди Тейлора для побудови різницевих схем для диференційних рівнянь та оцінки відповідних похибок наближення. З іншої сторони методи типу Гальоркіна мають тісний зв'язок з рядами Фур'є. В даній роботі на основі формули загального многочленного наближення для задачі Діріхле, розглянутої нижче, побудована чисельні схеми, розв'язками яких є коефіцієнти Фур'є шуканих даних, визначені в околі вузлів сітки, або значення наближеного розв'язку у вузлах сітки. Ряди Фур'є з многочленним базисом вводяться в околі кожного вузла сітки. В даній роботі ми обмежуємось частинними сумами таких рядів, які є многочленами до другого порядку включно. Внаслідок чого можна очікувати, що отримані многочлени будуть наближати з третім порядком точності в околі кожного вузла

Чисельні схеми для коефіцієнтів Фур'є та наближених значень точного розв'язку тісно між собою пов'язані. По них легко відновлюються многочленні наближення другого степеня в околі кожного вузла. Це дозволяє отримати наближення не тільки до точного розв'язку, але і до похідних до другого порядку включно.

Покажемо, як можна отримати сіткові схеми для задачі Діріхле

$$-\alpha u_{xx}-\beta u_{yy}=f,$$

$$u(x,-1)=\varphi_1(x),\quad u(x,1)=\varphi_2(x),$$

$$u(-1,y)=\psi_1(y),\quad u(1,y)=\psi_2(y).$$

на основі формули загального многочленного розв’язку, отриманого нами раніше [6]. Цей многочленний розв’язок можна зобразити у вигляді

$$u_n=\int_{-1}^{x}dx_1\int_{-1}^{y}S_n^{-1}\overline{\pi}_{xy}^{n}\left(\int_{-1}^{x_1}dx_2\int_{-1}^{y_1}g(x_2,y_2)dy_2\right)+R_n(x,y),$$

де

$$g(x,y)=f(x,y)-\alpha\frac{y-1}{2}\partial_{xx}\varphi_1+\alpha\frac{y+1}{2}\partial_{xx}\varphi_2-\beta\frac{x-1}{2}\partial_{yy}\psi_1+\beta\frac{x+1}{2}\partial_{yy}\psi_2,$$

$$R_n(x,y)=$$

$$\pi_{xy}^{n+1}\left\{\int_{-1}^{x}dx_1\int_{-1}^{y}\left[\frac{\psi_2'(y_1)-\psi_1'(y_1)}{2}+\frac{\varphi_2'(x_1)-\varphi_1'(x_1)}{2}-\frac{c}{4}\right]dy_1+\varphi_1(x)+\psi_1(y)-a\right\},$$

$$a=u(-1,-1),$$

$$c=u(1,1)+u(-1,-1)-u(-1,1)-u(1,-1),$$

а

S_n^{-1} оператор, обернений до оператора

$$S_n = S_n(u_n'') = -\overline{\pi}_{xy}^n \left(\alpha \int_{-1}^{y} dy_1 \int_{-1}^{y_1} u_n''(x, y_2) dy_2 + \beta \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} u_n''(x_2, y) dx_2 \right),$$

$u_n'' \in \widetilde{\mathrm{M}}^n([-1,1]\times[-1,1])$,

який дає наближений розв'язок цієї задачі.

Тут і надалі будуть використовуватися такі позначення:

1) $\widetilde{L}_2[-1,1]$ такий підпростір простору $L_2[-1,1]$, кожний елемент $h=h(x)$ якого задовольняє умові

$$\int_{-1}^{1} h(x)dx = 0;$$

2) $\pi_x : L_2[-1,1] \to \widetilde{L}_2[-1,1]$ оператор, визначений формулою

$$(\pi_x h)(x) = h(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} h(x)dx$$

для довільного $h=h(x)$;

3) $\mathrm{M}^n[-1,1]$ підпростір многочленів однієї змінної, степінь кожного з яких не перевищує n;

4) $\widetilde{\mathrm{M}}^n[-1,1] = \mathrm{M}^n[-1,1] \cap \widetilde{L}_2[-1,1]$;

5) $\pi_x^n : L_2[-1,1] \to \mathrm{M}^n[-1,1]$, ортогональна проекція на підпростір многочленів, степінь яких не перевищує n, тобто оператор взяття часткової суми Фур'є-Лежандра;

6) $\overline{\pi}_x^n = \pi_x \pi_x^n$;

7) π_{xy}^n означає ортогональну проекцію простору $L_2([-1,1]\times[-1,1])$ на підпростір многочленів двох змінних $\mathrm{M}^n([-1,1]\times[-1,1])$, степінь яких по кожній із змінних не перевищує n, тобто взяття n-ої часткової суми ряду Фур'є-Лежандра у випадку двох змінних;

8) $\overline{\pi}_{xy}^n = \pi_{xy}\pi_{xy}^n$,

де π_{xy} для довільної функції $h=h(x,y)$ визначається формулою

$$\pi_{xy} h(x,y) = h(x,y) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} h(x,y)dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} h(x,y)dy + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} h(x,y)dxdy;$$

9) $\widetilde{L}_2([-1,1]\times[-1,1])$ такий підпростір простору $L_2([-1,1]\times[-1,1])$, кожний елемент $h=h(x,y)$ якого задовольняє двом умовам

$$\int_{-1}^{1} h(x,y)dx = \int_{-1}^{1} h(x,y)dy = 0;$$

10) $\tilde{\mathrm{M}}^n([-1,1]\times[-1,1]) = \mathrm{M}^n([-1,1]\times[-1,1]) \cap \tilde{L}_2([-1,1]\times[-1,1])$.

В даній роботі ми використаємо найпростіший випадок цієї формули, а саме $n=1$. В цьому випадку сімейство многочленів $\dot{K}_i = \dot{K}_i(x), i=1,\ldots,n$ зведеться до одного многочлена $\dot{K}_1$.

11) $\dot{\mathrm{M}}^n([-1,1])$ підпростір многочленів, степінь яких не перевищує n і які перетворюються в нуль на кінцях відрізка $[-1,1]$.

12) $\dot{\mathrm{M}}^n([-1,1]\times[-1,1])$ підпростір многочленів, степінь яких по кожній із двох змінних не перевищує n і які перетворюються в нуль на сторонах квадрата $[-1,1]\times[-1,1]$.

13) $\dot{\pi}_x^n : L_2([-1,1]) \to \dot{\mathrm{M}}^n[-1,1]$, ортогональна проекція простору сумовних з квадратом функцій на підпростір многочленів.

14) $\dot{\pi}_{xy}^n : L_2([-1,1]\times[-1,1]) \to \dot{\mathrm{M}}_n$ ортогональна проекція простору сумовних з квадратом функцій на підпростір многочленів, степінь яких не перевищує n і які на сторонах квадрата $[-1,1]\times[-1,1]$ перетворюються в нуль.

1.Коефіцієнти Фур'є та їх обчислення в найпростішому випадку

Многочлен K_1 і відповідне йому число λ_1 легко обчислити. Дійсно, вони визначаються із співвідношення ([3])

$$-\overline{\pi}_x^1 \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} K_1(x_2)dx_2 = \lambda_1 K_1(x),$$

де $\overline{\pi}_x^1 : L_2[-1,1] \to \tilde{\mathrm{M}}^1[-1,1]$ ортогональна проекція.

Співвідношення (4) еквівалентне співвідношенню

$$-\pi_x \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} K_1(x_2)dx_2 = \lambda_1 K_1(x) + \tau_1 P_3(x),$$

де $P_3 = P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$ многочлен Лежандра третьої степені.

Базисом підпростору $\tilde{\mathrm{M}}^1[-1,1]$ є лише один многочлен – многочлен Лежандра P_1. Із (4), або (5) випливає, що $K_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} P_1$, $\lambda_1 = \frac{2}{5}$, де

$P_1 = P_1(x) = x$ ортогональний многочлен Лежандра першого степеня, стандартизований умовою $P_1(1)=1$.

Справді, припустимо, що $K_1(x)=cP_1(x)$ і одержимо

$$\pi_x^1 \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} K_1(x_2)dx_2 = c\pi_x^1 \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} P_1(x_2)dx_2 ,$$

де c деяке число.

Використаємо формулу

$$\int_{-1}^{x} P_i(x_1)dx_1 = \frac{P_{i+1}(x)-P_{i-1}(x)}{2i+1}, i=1,2,...$$

для інтегрування стандартизованих многочленів Лежандра і будемо мати

$$-\pi_x^1\left(\int_{-1}^{x} dx \int_{-1}^{x_1} P_1(x_2)dx_2\right) = -\pi_x^1 \frac{\frac{P_3-P_1}{5}-(P_1+1)}{3} = -\pi_x^1\left(\frac{-\frac{1}{5}-1}{3}\right)P_1 = \frac{2}{5}P_1 ,$$

тобто (4) має місце при $K_1 = cP_1, \lambda_1 = \frac{2}{5}$, де c деяке число. Число c виберемо з умови нормування $\|K_1\|=1$ в $L_2[-1,1]$ і таким чином отримаємо $K_1 = \sqrt{3/2}P_1 = \sqrt{3/2}x$.

Число τ_1 із (5) дорівнює

$$\tau_1 = -\frac{\lambda_1 K_1(-1)}{P_3(-1)} = -\frac{2/5\left(-\sqrt{3/2}\right)}{-1} = \frac{\sqrt{6}}{5} ,$$

а тому многочлен K_1 задовольняє рівність

$$-\pi_x \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} K_1(x_2)dx_2 = \frac{2}{5}K_1(x) + \frac{\sqrt{6}}{5}P_3(x)$$

Многочлен $\dot{K}_1$ визначається з допомогою рівності

$$\dot{K}_1 = \dot{K}_1(x) = \int_{-1}^{x} K_1(x)dx = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(x^2-1\right).$$

Зазначимо, що із передостанньої рівності випливає співвідношення

$$-\partial_{xx}\dot{K}_1(x) = \frac{5}{2}\dot{K}_1(x) + \frac{\sqrt{6}}{2}\partial_x P_3(x).$$

Корені многочлена $\partial_x P_3(x)$ дорівнюють

$$\alpha_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \alpha_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Зазначимо, що в точках (9) друга похідна многочлена $\dot{K}_1$ співпадає з значеннями самого многочлена з точністю до множника 5/2.

Норму $\dot{K}_1(x)$ в $L_2([-1,1])$ легко обчислити:

$$\|\dot{K}_1\|^2 = \int_{-1}^{1}\left(\dot{K}_1(x)\right)^2 dx = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{x} K_1(x_1)dx_1\right)^2 dx =$$

$$-\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} K_1(x_2)dx_2\right) K_1(x)dx = \lambda_1 \int_{-1}^{1}\left(K_1(x)\right)^2 dx = \frac{2}{5}.$$

Проведені нами обчислення норми многочлена (7) при $n=1$ переносяться на випадок будь-якого n.

Для функції тотожно рівної одиниці отримаємо

$$\dot{\pi}_x^2(1) = \tfrac{5}{4}\left(1-x^2\right),$$

оскільки

$$\tfrac{5}{2}\int_{-1}^{1} 1\cdot \dot{K}_1(x)dx = -\frac{5\sqrt{6}}{6}.$$

Корисно мати на увазі, що отриманий многочлен (11) є найближчим в метриці простору $L_2([-1,1])$ до функції тотожно рівної одиниці серед многочленів, степінь яких не перевищує 2 і які є рівними нулю на кінцях проміжку $[-1,1]$.

Зазначимо, що многочлен (11) в коренях похідної многочлена Лежандра $\partial_x P_3(x)$ дорівнює одиниці.

Знайдемо коефіцієнти Фур'є функцій $(y+1)/2$ та $(y-1)/2$ Будемо мати,

$$\sigma_1 = \frac{1}{\|\dot{K}_1\|^2}\int_{-1}^{1}\frac{y+1}{2}\dot{K}_1(y)dy = -\frac{1}{\|\dot{K}_1\|^2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{y}\frac{y_1+1}{2}dy_1\right)K_1(y)dy =$$

$$-\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\frac{(y+1)^2}{4}K_1(y)dy = -\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\frac{y}{2}K_1(y) =$$

$$-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1}\left(P_1(y)\right)^2 dy = -\frac{5}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{2}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{12};$$

Аналогічно,

$$\sigma_2 = \frac{1}{\|\dot{K}_1\|^2}\int_{-1}^{1}\frac{y-1}{2}\dot{K}_1(y)dy = \frac{5\sqrt{6}}{12},$$

де

$$\dot{K}_1 = \int_{-1}^{x} K_1(x)dx_1 = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(x^2-1\right).$$

Довільній заданій функції $g \in L_2([-1,1]\times[-1,1]$ поставимо у відповідність многочлен

$$\dot{g}_2(x,y)=\hat{g}\dot{K}_1(x)\dot{K}_1(y)\,,\ \hat{g}=\frac{25}{4}\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(x,y)\dot{K}_1(x)\dot{K}_1(y)dxdy\right),$$

який її найкраще наближає в метриці L_2, порівняно із будь-яким іншим многочленом простору $\dot{M}^2([-1,1]\times[-1,1])$.

2. Загальний вигляд наближеного многочлена другого степеня

В цьому пункті ми виведемо загальну формулу для многочлена другого степеня від двох змінних для наближення розв'язку задачі Діріхле.

Для продовження викладу введемо деякі означення.

Нашою найближчою метою буде наближене знаходження проекції *mm^xy(уд* $_{xy}$*g)* через відомі значення правої частини рівняння Пуассона і крайових умов у деяких вибраних точках. Критерієм такого вибору буде побудова таких наближених формул, які були б точними на многочленах до другої степені.

Наша мета - обчислити многочлен вигляду

$$\dot{u}_2=\dot{u}_2(x',y')=\int_{-1}^{x'}dx\int_{-1}^{y'}dyS_1^{-1}\overline{\pi}_{xy}^{1}\left(\int_{-1}^{x}dx_1\int_{-1}^{y}\dot{g}_2(x_1,y_1)dy_1\right),$$

де $\dot{g}_2$ многочленне наближення відомої функції

$$g(x,y)=\overline{F}(x,y)-\frac{3y^2-6y-1}{12}\overline{\varphi}_1(x)+\frac{3y^2+6y-1}{12}\overline{\varphi}_2(x)-$$

$$\frac{3x^2-6x-1}{12}\overline{\psi}_1(y)+\frac{3x^2+6x-1}{12}\overline{\psi}_2(y),$$

точніше $\dot{g}_2=\dot{\pi}_{xy}^2 g$.

Зазначимо, що функція *g = g(x,y)* виражається через відомі функції - праву частину рівняння Пуассона (1) та значення розв'язку задачі Діріхле на сторонах квадрата (2).

Дидепенціюючи (18) отримаємо півність

$$\partial_{xy}g(x,y)=f(x,y)-\frac{y-1}{2}\partial_{xx}\varphi_1(x)+\frac{y+1}{2}\partial_{xx}\varphi_2(x)-$$
$$\frac{x-1}{2}\partial_{yy}\psi_1(y)+\frac{x+1}{2}\partial_{yy}\psi_2(y).$$

Тепер, враховуючи формули (13)-(15), із (19) можна виразити коефіцієнт Фур'є розв'язку через аналогічні коефіцієнти Фур'є відомих функцій.

$$\widehat{g}_{xy} = \widehat{f} - \frac{5\sqrt{6}}{12}\left(\widehat{\varphi}_{1xx} + \widehat{\varphi}_{2yy} + \widehat{\psi}_{1xx} + \widehat{\psi}_{2yy}\right),$$

де

$$\widehat{\varphi}_{kxx} = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} \partial_{xx}\varphi_k \dot{K}_1(x)dx, \widehat{\psi}_{kyy} = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} \partial_{yy}\psi_k \dot{K}_1(y)dy, k = 1,2 .$$

Отже, функцію (18) ми наблизили з допомогою многочлена вигляду

$$g_2(x, y) = \widehat{g}_{xy}\dot{K}_1(x)\dot{K}_1(y),$$

де єдиний в даному випадку його коефіцієнт Фур'є записується у вигля (20).

Подамо (17) у вигляді

$$\dot{u}_2 = \dot{u}_2(x', y') = \int_{-1}^{x'} dx_1 \int_{-1}^{y'} dy S_1^{-1}\pi_{xy}^1 \left(\int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{y} dy_1 \int_{-1}^{x_1} dx_2 \int_{-1}^{y_1} g_2(x_2, y_2)dy_2 \right),$$

де

$$g_2(x, y) = \widehat{g}_{xy} K_1(x)K_1(y).$$

Виконаємо нескладні обчислення за допомогою формули (2) і отримаєм

$$\dot{u}_2 = \frac{\lambda_1\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_1}\widehat{g}_{xy}\dot{K}_1(x)\dot{K}_1(y) = \frac{1}{5}\widehat{g}_{xy}\dot{K}_1(x)\dot{K}_1(y).$$

Тепер із формул (2) і (29) ми отримаємо

$$u_2(x, y) = \left[\frac{1}{5}\widehat{f} - \frac{\sqrt{6}}{12}\left(\widehat{\varphi}_{1xx} + \widehat{\varphi}_{2xx} + \widehat{\psi}_{1yy} + \widehat{\psi}_{2yy}\right)\right]\dot{K}_1(x)\dot{K}_2(y) + R_2(x, y),$$

де

$$R_2(x, y) = \pi_y^2 \frac{\psi_2(y) - \psi_1(y)}{2}x + \pi_x^2 \frac{\varphi_2(x) - \varphi_1(x)}{2}y +$$

$$\pi_y^2 \frac{\psi_2(y) + \psi_1(y)}{2} + \pi_x^2 \frac{\varphi_2(x) + \varphi_1(x)}{2} -$$

$$-\frac{a_2 - a_1}{2}(x+1) - \frac{a_4 - a_1}{2}(y+1) - c(xy + x + y + 1) - a_1,$$

$$a_1 = u(-1,-1), a_2 = u(1,-1), a_3 = u(1,1), a_4 = u(-1,1)$$

$$c = (a_1 + a_3 - a_2 - a_4)/4.$$

Нагадаємо, що я" означає операцію взяття часткової суми ряду Фур'є-Лежандра відносно змінної *x*.

3. Побудова обчислювальної схеми

В цьому пункті для зручності будемо вважати вихідні дані, тобт< функції /,ф1,(р2,\|/1,\|/2 многочленами другого степеня.

Диференціюючи (24) один раз по *x* і один раз по *y* і отримаємо

$$\tilde{u}_1(x,y)=\left[\frac{1}{5}\hat{f}-\frac{\sqrt{6}}{12}\left(\hat{\varphi}_{1xx}+\hat{\varphi}_{2xx}+\hat{\psi}_{1yy}+\hat{\psi}_{2yy}\right)\right]K_1(x)K_1(y)+\tilde{R}_1(x,y),$$

де

$$\tilde{u}_1(x,y)=\partial_{xy}u_2(x,y),\tilde{R}_1(x,y)=\partial_{xy}R_2(x,y).$$

Обчислюючи похідну в явному вигляді, отримаємо

$$\tilde{R}_1(x,y)=\frac{\psi_2'(y)-\psi_1'(y)}{2}+\frac{\varphi_2'(x)-\varphi_1'(x)}{2}-c,$$

де штрихом позначені похідні.

Розглянемо функцію $\varphi_1'(x)$. Її можна подати у вигляді

$$\varphi_1'(x)=\pi_x\varphi_1'(x)+\frac{a_2-a_1}{2},$$

де

$$\pi_x\theta(x)=\theta(x)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\theta(x)dx.$$

Подаючи всі інші функції із (27) в такому ж вигляді, отримаємо

$$\tilde{R}_2(x,y)=\pi_y\frac{\psi_2'(y)-\psi_1'(y)}{2}+\pi_x\frac{\varphi_2'(x)-\varphi_1'(x)}{2}+c$$

Припустимо, що проекція функції $\varphi_1(x)$ подається у вигляді

$$\pi_x^1\partial_x\varphi_1(x)=\hat{\varphi}_1K_1(x),$$

де

$$\hat{\varphi}_1=\int_{-1}^{1}\pi_x^1\partial_x\varphi_1(x)K_1(x)dx=\int_{-1}^{1}\partial_x\varphi_1(x)K_1(x)dx$$

Підставляючи (28) і інші аналогічні співвідношення в (29), дістаємо

$$\tilde{R}_2(x,y)=\frac{\hat{\psi}_2-\hat{\psi}_1}{2}K_1(y)+\frac{\hat{\varphi}_2-\hat{\varphi}_1}{2}K_1(x)+c.$$

Підставимо (32) в (26) і будемо мати

$$\tilde{u}_2(x,y)=\left[\frac{1}{5}\hat{f}-\frac{\sqrt{6}}{12}\left(\hat{\varphi}_{1xx}+\hat{\varphi}_{2xx}+\hat{\psi}_{1yy}+\hat{\psi}_{2yy}\right)\right]K_1(x)K_1(y)+$$

$$\frac{\hat{\psi}_2-\hat{\psi}_1}{2}K_1(y)+\frac{\hat{\varphi}_2-\hat{\varphi}_1}{2}K_1(x)+c$$

Із (26) випливає, що

$$\hat{\varphi}_{1xx}=-\frac{5}{2}\hat{\varphi}_1$$

і т.д.

$$\tilde{u}_2(x,y)=\left[\frac{1}{5}\hat{f}+\frac{5\sqrt{6}}{24}\left(\hat{\varphi}_1+\hat{\varphi}_2+\hat{\psi}_1+\hat{\psi}_2\right)\right]K_1(x)K_1(y)+$$

$$\frac{\widehat{\psi}_2-\widehat{\psi}_1}{2}K_1(y)+\frac{\widehat{\varphi}_2-\widehat{\varphi}_1}{2}K_1(x)+c.$$

Із (26') випливає, що

$$u_2(x,y)=\int_{-1}^{x}dx_1\int_{-1}^{y}\tilde{u}_1(x_1,y_1)dy_1+\varphi_1(x)+\psi_1(y)-a_1.$$

Введемо позначення:

$\psi_0(y)=u(0,y),\varphi_0(x)=u(x,0)$.

Зазначимо при цьому, що,

$$\varphi_1(x)=u(x,-1)$$

і т.д. в силу крайових умов Діріхле. Тому, аналогічно до (30) покладемо

$\overline{\pi}_x^1\varphi_0'(x)=\widehat{\varphi}_0K_1(x),\overline{\pi}_y^1\psi_0'(y)=\widehat{\psi}_0K_1(y)$

Підставимо значення $x=0$ в (36), продиференціюємо по y, застосуємо проекцію $\overline{\pi}_y^1$ і в результаті отримаємо

$$\overline{\pi}_y^1\psi_0'(y)=\frac{\widehat{\psi}_2-\widehat{\psi}_1}{2}K_1(y)-\frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{1}{5}\widehat{f}+\frac{5\sqrt{6}}{24}\left(\widehat{\varphi}_1+\widehat{\varphi}_2+\widehat{\psi}_1+\widehat{\psi}_2\right)\right)K_1(y),$$

звідки,

$$\widehat{\psi}_0=\frac{\widehat{\psi}_2-\widehat{\psi}_1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{1}{5}\widehat{f}+\frac{5\sqrt{6}}{24}\left(\widehat{\varphi}_1+\widehat{\varphi}_2+\widehat{\psi}_1+\widehat{\psi}_2\right)\right).$$

Аналогічно,

$$\widehat{\varphi}_0=\frac{\widehat{\varphi}_2-\widehat{\varphi}_1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{1}{5}\widehat{f}+\frac{5\sqrt{6}}{24}\left(\widehat{\varphi}_1+\widehat{\varphi}_2+\widehat{\psi}_1+\widehat{\psi}_2\right)\right).$$

Перенесемо отриманий результат на задачу Діріхле для довільного квадрата $\Pi_h=[x_0-h,x_0+h]\times[y_0-h,y_0+h]$:

$-\partial_{ss}v-\partial_{tt}v=g,g=g(s,t)$,

$$v(s,y_0-h)=\xi_1(s),v(s,y_0+h)=\xi_2(s),$$

$v(x_0-h,t)=\eta_1(t),v(x_0+h,t)=\eta_2(t)$,

$$(s,t)\in\Pi_h.$$

Шляхом лінійної заміни

$x=(s-x_0)/h,y=(t-y_0)/h$

задачу (38),(39) легко звести до задачі вигляду

$-\partial_{xx}u-\partial_{yy}u=h^2f$,

$$u(x,-1)=\varphi_1(x),u(x,1)=\varphi_2(x),$$

$u(-1,y)=\psi_1(y),u(1,y)=\psi_2(y)$,

$$(x,y)\in\Pi=[-1,1]\times[-1,1].$$

де

$u(x,y)=v(x_0+hx,y_0+hy), f(x,y)=g(x_0+hx,y_0+hy)$,

$\varphi_1(x)=\xi_1(x_0+hx)$,

і т.д.

Означення. Задачу Діріхле (41),(42) будемо називати задачею в фізичних координатах, а задачу (44),(45) задачею в геометричних координатах.

Формули (40) встановлюють взаємно однозначну відповідність між фізичними і геометричними координатами. Це дозволяє за знайденим розв'язком в одних з цих координат легко знаходити відповідний йому розв'язок в інших координатах. З точки зору зручності реалізації на ЕОМ ми вибираємо геометричні координати за основні і розрахунки вестимемо як правило в геометричних координатах. Для того, щоб отримані в цьому параграфі формули були справедливими в геометричних координатах для довільного квадрата $П_Л$, достатньо всюди, де зустрічається права частина f рівняння (38), замінити її на $h^2 f$, що ми зараз і продемонструємо.

Наведені нижче твердження дають явне подання наближеного розв'язку крайової задачі (38),(39) в геометричних координатах.

Твердження 1. *Побудований многочлен для наближення точного розв'язку задачі Діріхле (38),(39) в геометричних координатах запишеться у вигляді*

$$u_2(x,y)=\left[\frac{1}{5}h^2\hat{f}+\frac{5\sqrt{6}}{24}\left(\hat{\varphi}_1+\hat{\varphi}_2+\hat{\psi}_1+\hat{\psi}_2\right)\right]\dot{K}_1(x)\dot{K}_1(y)+$$

$$\frac{\hat{\psi}_2-\hat{\psi}_1}{2}\dot{K}_1(y)(x+1)+\frac{\hat{\varphi}_2-\hat{\varphi}_1}{2}\dot{K}_1(x)(y+1)+c(x+1)(y+1)+$$

$$\pi_x^2\varphi_1(x)+\pi_y^2\psi_1(y)-a_1.$$

де

$$\pi_x^1\varphi_1(x)=\hat{\varphi}_1K_1(x),\pi_x^1\varphi_2(x)=\hat{\varphi}_2K_1(x),$$

$$\pi_y^1\psi_1(y)=\hat{\varphi}_1K_1(y),\pi_y^1\psi_2(y)=\hat{\psi}_2K_1(y).$$

Твердження 2. *Похідна $\partial_{xy}u$ точного розв'язку u задачі (38),(39) в геометричних координатах запишеться у вигляді*

$$\tilde{u}_2(x,y)=\left[\frac{1}{5}h^2\hat{f}+\frac{5\sqrt{6}}{24}\left(\hat{\varphi}_1+\hat{\varphi}_2+\hat{\psi}_1+\hat{\psi}_2\right)\right]K_1(x)K_1(y)+$$

$$\frac{\hat{\psi}_2-\hat{\psi}_1}{2}K_1(y)+\frac{\hat{\varphi}_2-\hat{\varphi}_1}{2}K_1(x)+c.$$

Наступні два твердження будуть ключем до побудови сіткових схем. Тут можна теж вважати, що мова йде про розв'язок задачі (3 8),(39) в квадраті $П_Л$ в геометричних координатах.

Твердження 3. *Нехай мають місце рівності*

$$\pi_x^1 \partial_x u_2(x,-1)=\widehat{\varphi}_1 K_1(x), \pi_x^1 \partial_x u_2(x,1)=\widehat{\varphi}_2 K_1(x), \pi_x^1 \partial_x u_2(x,0)=\widehat{\varphi}_0 K_1(x).$$

Тоді має місце наступна рівність між коефіцієнтами Фур'є наближеного розв'язку

$$\widehat{\varphi}_0 = \frac{\widehat{\varphi}_2 - \widehat{\varphi}_1}{2} - \left(\frac{\sqrt{6}}{20} \widehat{f} + \frac{5}{16} \left(\widehat{\varphi}_1 + \widehat{\varphi}_2 + \widehat{\psi}_1 + \widehat{\psi}_2 \right) \right).$$

Твердження 4. *Нехай мають місце рівності*

$$\pi_y^1 \partial_y u_2(-1,y)=\widehat{\psi}_1 K_1(x), \pi_y^1 \partial_y u_2(1,y)=\widehat{\psi}_2 K_1(y), \pi_y^1 \partial_y u_2(0,y)=\widehat{\psi}_0 K_1(y).$$

Тоді має місце наступна рівність між коефіцієнтами Фур'є наближеного розв'язку

$$\widehat{\psi}_0 = \frac{\widehat{\psi}_2 - \widehat{\psi}_1}{2} - \left(\frac{\sqrt{6}}{20} \widehat{f} + \frac{5}{16} \left(\widehat{\varphi}_1 + \widehat{\varphi}_2 + \widehat{\psi}_1 + \widehat{\psi}_2 \right) \right).$$

4. Задача Діріхле в довільному прямокутнику

Побудуємо сіткові схеми для задачі Діріхле на довільному прямокутнику

$[a_x, b_x] \times [a_y, b_y]$:

$$-\partial_{ss} v - \partial_{tt} v = g, g = g(s,t),$$

$$v(s,a_y)=\xi_1(s), v(s,b_y)=\xi_2(s),$$

$$v(a_x,t)=\eta_1(t), v(b_x,t)=\eta_2(t),$$

$$(s,t) \in [a_x, b_x] \times [a_y, b_y].$$

Розглянемо сітку Π_ω, утворену точками

$(x_i, y_j), i=0,...,N_x, j=0,...,N_y$,

де

$$x_i = a_x + ih, y_j = a_y + jh$$

і припустимо, що

$$b_x = a_x + N_x h, b_y = a_y + N_y h.$$

Через ω позначимо множину $(i,j), i=0,..,N_x, j=0,...,N_y$.

Таку сітку, в якої кроки по x та по y співпадають називають квадратною. В цьому розумінні сітка (40) квадратна.

Внутрішніми точками сітки будемо називати ті точки сітки, для яких $i=1,...,N_x-1, j=1,...,N_y-1$. Граничними будемо називати всі інші точки

сітки. Кожній внутрішній точці *(x^y A* сітки (40) поставимо у відповідність квадрат П - = [x(--*h,x*$_i$ +/i}x[y$_7$ -*h,yj* +*h*\.

На кожному квадраті П,. побудуємо многочленне наближення розв'язку задачі Діріхле в геометричних координатах. У відповідності з твердженням 1 такий многочлен запишемо у вигляді

$$u_2(x,y)=\left[\frac{1}{5}h^2\widehat{f}_{ij}+\frac{5\sqrt{6}}{24}\left(\widehat{\varphi}_{i-1,j}+\widehat{\varphi}_{i+1,j}+\widehat{\psi}_{i,j-1}+\widehat{\psi}_{i,j+1}\right)\right]\dot{K}_1(x)\dot{K}_1(y)+$$

$$\frac{\widehat{\psi}_{i+1,j}-\widehat{\psi}_{i-1,j}}{2}\dot{K}_1(y)(x+1)+\frac{\widehat{\varphi}_{i,j+1}-\widehat{\varphi}_{i,j-1}}{2}\dot{K}_1(x)(y+1)+c_{ij}(x+1)(y+1)+$$

$$\pi_x^2\varphi_{i,j-1}(x)+\pi_y^2\psi_{i-1,j}(y)-a_{i-1,j-1},$$

де

$$f_{ij}(x)=f(x_i+hx,y_j+hy),$$

$$\varphi_{ij}(x)=u(x_i+hx,y_j),\psi_{ij}(x)=u(x_i,y_j+hx),$$

$$a_{ij}=u(x_i,y_j),c_{ij}=\frac{a_{i-1,j-1}-a_{i+1,j-1}+a_{i+1,j+1}-a_{i-1,j+1}}{4},$$

$$\widehat{\varphi}_{ij}=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\partial_x\varphi_{ij}(x)P_1(x)dx,\widehat{\psi}_{ij}=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\partial_y\psi_{ij}(y)P_1(y)dy,$$

$$\widehat{f}_{ij}=\frac{9}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f_{ij}(x)P_1(x)P_1(y)dxdy,$$

Зауважимо, що ми вимагаємо точної рівності у формулах (42) лише для граничних вузлів. Числа (42) для внутрішніх вузлів ми знаходитимемо із системи лінійних алгебраїчних рівнянь і тому можна сподіватись що для внутрішніх вузлів будуть мати місце формули (42) наближено.

Розглянемо питання про наближення функцій φ_{ij},ψ_{ij}. Припустимо, що

$$\pi_x^1\partial_x\varphi_{ij}(x)=\widehat{\varphi}_{ij}K_1(x).$$

Якщо, $\varphi_{ij}(x)$є многочленом не вище другого степеня, то звідси випливає, що

$$\varphi_{ij}(x)=\frac{a_{i+1,j}+a_{i-1,j}}{2}+\frac{a_{i+1,j}-a_{i-1,j}}{2}x+\widehat{\varphi}_{ij}\dot{K}_1(x).$$

Поклавши $x=0$ в (44) отримаємо

$$a_{ij}=\frac{a_{i+1,j}+a_{i-1,j}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{4}\widehat{\varphi}_{ij}.$$

Аналогічно, якщо $\psi_{ij}(y)$ є многочленом не вище другого степеня, то

$$\psi_{ij}(y)=\frac{a_{i,j+1}+a_{i,j-1}}{2}+\frac{a_{i,j+1}-a_{i,j-1}}{2}y+\widehat{\psi}_{ij}\dot{K}_1(y)$$

і

$$a_{ij}=\frac{a_{i,j+1}+a_{i,j-1}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{4}\widehat{\psi}_{ij}.$$

З урахуванням формул (57),(59) наближений многочлен (53) розв'язку задачі Діріхле на квадраті Π_{ij} запишеться у вигляді

$$u_2(x,y)=\left[\frac{1}{5}h^2\widehat{f}_{ij}+\frac{5\sqrt{6}}{24}\left(\widehat{\varphi}_{i-1,j}+\widehat{\varphi}_{i+1,j}+\widehat{\psi}_{i,j-1}+\widehat{\psi}_{i,j+1}\right)\right]\dot{K}_1(x)\dot{K}_1(y)+$$

$$\frac{\widehat{\psi}_{i+1,j}-\widehat{\psi}_{i-1,j}}{2}\dot{K}_1(y)(x+1)+\frac{\widehat{\varphi}_{i,j+1}-\widehat{\varphi}_{i,j-1}}{2}\dot{K}_1(x)(y+1)+c_{ij}(x+1)(y+1)$$

+

$$\widehat{\varphi}_{i,j-1}\dot{K}_1(x)+\widehat{\psi}_{i-1,j}\dot{K}_1(y)+\frac{a_{i+1,j-1}-a_{i-1,j-1}}{2}(x+1)+\frac{a_{i-1,j+1}-a_{i-1,j-1}}{2}(y+1)+a_{ij}$$

Многочлен (60) має другий степінь і побудований на основі попарних добутків многочленів

$\dot{K}_1(x), x+1,1$ та $\dot{K}_1(y), y+1,1$

Один з дев'яти коефіцієнтів, а саме, коефіцієнт при *K^x^K^y)* побудований на основі необхідності задовольнити рівняння (50) в елементарному квадраті $\Pi_{;/}$, а всі інші із необхідності наблизити функцію *u* на сторонах цього квадрата. Звідси випливає, що якщо розв'язком задачі Діріхле на елементарному квадраті вигляду (38),(39) є алгебраїчний многочлен від двох змінних степеня не вище два по кожній із змінних, то формула (60) його відновлює точно.

Із твеплжень 2 та 3 ми легко отпимаємо. пю

$$\widehat{\varphi}_{ij}=\frac{\widehat{\varphi}_{i,j+1}-\widehat{\varphi}_{1,j-1}}{2}-\left[\frac{\sqrt{6}}{20}h^2\widehat{f}_{ij}+\frac{5}{16}\left(\widehat{\varphi}_{i-1,j}+\widehat{\varphi}_{i+1,j}+\widehat{\psi}_{i,j-1}+\widehat{\psi}_{i,j+1}\right)\right]$$

$$\widehat{\psi}_{ij}=\frac{\widehat{\psi}_{i+1,j}-\widehat{\psi}_{i-1,j}}{2}-\left[\frac{\sqrt{6}}{20}h^2\widehat{f}_{ij}+\frac{5}{16}\left(\widehat{\varphi}_{i-1,j}+\widehat{\varphi}_{i+1,j}+\widehat{\psi}_{i,j-1}+\widehat{\psi}_{i,j+1}\right)\right]$$

5. Сіткові схеми для задачі Діріхле

Введемо позначення:

$$a_{ij}=u\left(a_x+ih_x, a_y+jh_y\right),$$

$$h_x=\frac{b_x-a_x}{n_x}, h_y=\frac{b_y-a_y}{n_y},$$

$$\hat{\varphi}_{ij} = a_{i+1,j} + a_{i-1,j} - 2a_{ij},$$

$$\hat{\psi}_{ij} = a_{i,j+1} + a_{i,j-1} - 2a_{ij},$$

$$\varphi_{ij}(x) = \frac{a_{i-1,j} + a_{i+1,j}}{2} + \frac{a_{i-1,j} - a_{i+1,j}}{2} x + \frac{1}{2}\hat{\varphi}_{ij}\left(x^2 - 1\right),$$

$$\psi_{ij}(y) = \frac{a_{i-1,j} + a_{i+1,j}}{2} + \frac{a_{i-1,j} - a_{i+1,j}}{2} y + \frac{1}{2}\hat{\psi}_{ij}\left(y^2 - 1\right),$$

$$\hat{f}_{ij} = \frac{8}{3}\frac{\left(f_{i-1,j-1} + f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j-1} + f_{i+1,j+1}\right) + 8\left(f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1}\right) + 64 f_{ij}}{64}$$

,

$$u_{ij}(x,y) = \left(\frac{2}{5\left(h_x^{-2} + h_y^{-2}\right)}\hat{f}_{11} + \frac{5}{16}\frac{\left(h_x^{-2}\left(\hat{\varphi}_{i-1,j} + \hat{\varphi}_{i+1,j}\right) + h_y^{-2}\left(\hat{\psi}_{i,j-1} + \hat{\psi}_{i,j+1}\right)\right)}{h_x^{-2} + h_y^{-2}}\right)\left(x^2 - 1\right)\left(y^2 -\right.$$

$$\frac{-\hat{\psi}_{i,j-1} + \hat{\psi}_{i,j+1}}{4}\left(y^2 - 1\right)(x+1) + \frac{-\hat{\varphi}_{i-1,j} + \hat{\varphi}_{i+1,j}}{4}\left(x^2 - 1\right)(y+1) +$$

$$\frac{a_{i-1,j-1} + a_{i+1,j+1} - a_{i+1,j-1} - a_{i-1,j+1}}{4}(x+1)(y+1) +$$

$$\frac{a_{i+1,j-1} - a_{i-1,j-1}}{2}(x+1) + \frac{1}{2}\hat{\varphi}_{i-i,j}\left(x^2 - 1\right) +$$

$$\frac{a_{i-1,j+1} - a_{i-1,j-1}}{2}(y+1) + \frac{1}{2}\hat{\psi}_{i-1,j}\left(y^2 - 1\right) + a_{i-1,j-1}$$

де $(-1 \le x, y \le 1)$.

Тоді сіткова схема для задачі Діріхле (1), (2) має вигляд

$$a_{ij} = \left(w \cdot \hat{f}_{ij} + \frac{a_{i-1,j-1} + a_{i+1,j+1} + a_{i-1,j+1} + a_{i+1,j-1}}{16} + \right.$$

$$\left.\frac{(8-5w_x)\left(a_{i,j+1} + a_{i,j-1}\right) + (8-5w_y)\left(a_{i-1,j} + a_{i+1,j}\right)}{16}\right),$$

де

$$w_x = \frac{2h_x^{-1}}{h_x^{-2} + h_y^{-2}},\ w_y = \frac{2h_y^{-1}}{h_x^{-2} + h_y^{-2}},\ w = \frac{3}{20\left(h_x^{-2} + h_y^{-2}\right)}.$$

При цьому многочленне наближення в h - околі вузла $\left(x_i, y_j\right) = \left(a_x + ih_x, a_y + jh_y\right)$ дорівнює

$$u_{ij}\left(\frac{x - x_i}{h_x}, \frac{y - y_j}{h_y}\right), x_{i-1} \le x \le x_{i+1}, y_{i-1} \le y \le y_{i+1}.$$

Звідси випливають формули для наближення частинних похідних в (i, j)-му вузлі:

$$u_{x,ij}=\frac{a_{i+1,j}-a_{i-1,j}}{2},$$

$$u_{y,ij}=\frac{a_{i,j+1}-a_{i,j-1}}{2},$$

$$u_{xx,ij}=-\frac{3}{10\left(h_1^{-2}+h_2^{-2}\right)}\hat{f}_{11}-\frac{5}{8}\frac{h_1^{-2}\left(\hat{\varphi}_{i,j-1}+\hat{\varphi}_{i,j+1}\right)+h_2^{-2}\left(\hat{\psi}_{i-1,j}+\hat{\psi}_{i+1,j}\right)}{h_1^{-2}+h_2^{-2}}+\frac{1}{2}\left(\hat{\varphi}_{i,j-1}+\hat{\varphi}_{i,j+}\right.$$

$$u_{yy,ij}=-\frac{3}{10\left(h_1^{-2}+h_2^{-2}\right)}\hat{f}_{11}-\frac{5}{8}\frac{h_1^{-2}\left(\hat{\varphi}_{i,j-1}+\hat{\varphi}_{i,j+1}\right)+h_2^{-2}\left(\hat{\psi}_{i-1,j}+\hat{\psi}_{i+1,j}\right)}{h_1^{-2}+h_2^{-2}}+\frac{1}{2}\left(\hat{\psi}_{i-1,j}+\hat{\psi}_{i+1,}\right.$$

У випадку рівномірної сітки наближений многочлен, записаний в геометричних (розрахункових) координатах має вигляд

$$u_{ij}(x,y)=\left(\frac{3h^2}{40}\hat{f}_{11}+\frac{5}{32}\left(\hat{\varphi}_{i-1,j}+\hat{\varphi}_{i+1,j}+\hat{\psi}_{i,j-1}+\hat{\psi}_{i,j+1}\right)\right)\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+$$

$$\frac{-\hat{\psi}_{i,j-1}+\hat{\psi}_{i,j+1}}{4}\left(y^2-1\right)(x+1)+\frac{-\hat{\varphi}_{i-1,j}+\hat{\varphi}_{i+1,j}}{4}\left(x^2-1\right)(y+1)+$$

$$\frac{a_{i-1,j-1}+a_{i+1,j+1}-a_{i+1,j-1}-a_{i-1,j+1}}{4}(x+1)(y+1)+$$

$$\frac{a_{i+1,j-1}-a_{i-1,j-1}}{2}(x+1)+\frac{1}{2}\hat{\varphi}_{i-i,j}\left(x^2-1\right)+$$

$$\frac{a_{i-1,j+1}-a_{i-1,j-1}}{2}(y+1)+\frac{1}{2}\hat{\psi}_{i-1,j}\left(y^2-1\right)+a_{i-1,j-1}.$$

Сіткова схема у випадку рівномірної сітки матиме вигляд

$$a_{ij}=\frac{3}{40}h^2\hat{f}_{ij}+\frac{a_{i-1,j-1}+a_{i-1,j+1}+a_{i+1,j-1}+a_{i+1,j+1}+3\left(a_{i-1,j}+a_{i+1,j}+a_{i,j-1}+a_{i,j+1}\right)}{16}$$

6. Оцінка похибок апроксимації

Перейдемо до оцінок порядку апроксимації в соболєвських просторах $W_2^1=W_2^1(\Pi_h)$, $\dot{W}_2^1=\dot{W}_2^1(\Pi_h)$.

Через $\dot{S}_2(g)$ позначимо многочлен найкращого наближення функції $g\in\dot{W}_2^1$ в метриці простору $\dot{W}_2^1$.

Твердження 5. *Припустимо, що функція $R=R(x,y)$ приймає крайові значення (38) на сторонах квадрата Π_h, $R_2=R_2(x,y)$ є многочленом другого степеня, для якого*

$$\|R-R_2\|\le ch^3,\|\partial_x(R-R_2)\|\le ch^2,\|\partial_y(R-R_2)\|\le ch^2,$$

де c не залежить від h. Тоді, для многочлена

$$u_2 = \dot{S}_2(u-R)+R_2$$

має місце оцінка

$$\|u-u_2\|_{W_2^1} \le Ch^2,$$

де C деяка константа, не залежна від h.

Доведення. Функцію u подамо у вигляді

$$u = (u-R)+R.$$

Віднімаючи рівності (66) та (64), одержимо

$$u-u_2 = \left((u-R)-\dot{S}_2(u-R)\right)+(R-R_2).$$

Із (79) отримаємо оцінку для норм

$$\|u-u_2\|_{W_2^1} \le \left\|(u-R)-\dot{S}_2(u-R)\right\|_{\dot{W}_2^1} + \|R-R_2\|_{W_2^1}.$$

Оскільки, функція $u-R$ перетворюється в нуль, то перший доданок в (68) не перевищує c_1h^2, де c_1 деяка константа. Другий доданок цієї ж нерівності оцінюється на основі нерівностей (63) і теж не перевищує c_2h^2 з деяким c_2 не залежним від h. Тому, ми отримуємо оцінку (65).

В умовах попереднього твердження має місце

Твердження 6. *Для многочлена*

$$u_2 = \dot{S}_2(u-R_2)+R_2$$

має місце оцінка

$$\|u-u_2\| \le Ch^2.$$

Доведення. Подамо многочлен (69) у вигляді

$$u_2 = \dot{S}_2(u-R)+\dot{S}_2(R-R_2)+R_2.$$

Внаслідок нерівностей (63) і означення $\dot{S}_2$ має місце нерівність

$$\left\|\dot{S}_2(R-R_2)\right\|_{\dot{W}_2^1} \le 2ch^2.$$

Тепер із (71) і попереднього твердження випливає оцінка (70).

ЛІТЕРАТУРА

1. Дзядік В.К. Апроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. - Киев: Наукова думка.-1998.
2, Янчук П.С. Аппроксимационный метод для эллиптических и параболических уравнений//Тр. Мат. Ин-та АН СССР.-1987.-180.-С.237-238.
3.Янчук П.С. Использование А-метода при решении эллиптических и параболических уравнений //Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов.-Киев:Ин-т математики.-1989,-С.112-121.
4,Янчук П.С. Многочленно - сітковий спосіб наближеного розв'язування крайових задач//Волинський математичний вісник.-1996.-С. 139-145.
б.Янчук П.С. Апроксимаційно-ітеративні схеми кусково-многочленного наближення//Волинський математичний вісник.-1995.-С. 184.-187.
6. Янчук П.С. Метод многочленних рядів Фур'є для задачі Діріхле для рівняння Пуассона в квадраті [— 1,1 Jx [— 1,1] //Волинський математичний вісник.-2000.-С. 193-208.

Янчук П.С.

КУСОЧНО-МНОГОЧЛЕННІ НАБЛИЖЕННЯ І КВАЗІСПЕКТРАЛЬНІ МНОГОЧЛЕНИ.

В роботі будуються квадратичні кусочно-многочленні наближення для розв’язків еліптичних рівнянь. При їх побудові використані наближені інтегральні подання невідомого розв’язку та квазіспектральні многочлени у найпростішому випадку. Розглянуті нами кусочно-многочленні розв’язки тісно пов’язані із скінчено-різнецевими схемами четвертого порядку апроксимації у випадку рівномірної сітки.

Janchuk P.S.

PIECEWISE-POLYNOMIAL APPROXIMATION SOLUTION OF THE ELLIPTIC EQUATION.

In the given work we have constructed piecewise-polynomial approximation, which has been stuck together from polynomials of a degree not higher second, for the solution of the elliptic equations. Received by us piecewise-polynomial approximation closely connected with the finite-difference approximation of the fourth order in case of a uniform grid.