ПОБУДОВА БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ.

Петро Янчук,
Валентина Собко

Вступ

Одним із найбільш універсальних методів практичного розв'язування різноманітних задач математичної фізики є метод Гальоркіна. Описання цього методу міститься в багатьох посібниках з наближеного інтегрування інтегро-диференційних рівнянь. Процедура Гальоркіна полягає в тому, що наближений розв'язок крайової задачі шукається у вигляді лінійної комбінації скінченого числа базисних функцій. В практичних застосуваннях вибір базису впливає на те, яким числом базисних функцій можна обмежитись. Класичне формулювання методу в застосуванні до лінійних крайових задач має на увазі використання в ролі природнього базису власних функцій стаціонарної крайової задачі, що відразу приводить до оптимальних значень коефіцієнтів розкладу і автоматично забезпечує виконання крайових умов. В даній роботі пропонується використовувати замість власних функцій, клас описаних нижче квазівласних функцій. Наприклад, власні функції оператора Лапласа в прямокутнику є тригонометричні функції, а квазівласні функції можна вибрати у вигляді алгебраїчних поліномів. Як це не звучить парадоксально, при формуванні базису для методу Гальоркіна потрібно брати менше число квазівласних функцій, ніж власних для досягнення однакової точності. Крім того, квазівласні функції є більш гнучкими для врахування крайових умов. Побудові одного із таких класів квазівласних функцій і присвячена дана робота. Ці функції можна використовувати при розв'язуванні задач, які описують процеси дифузії, теплопровідності і ін.

В попередньо опублікованій статті авторами були знайдені спеціальні функції $\varphi_c(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T_{2i}(x)$ та $\varphi_s(x)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i T_{2i-1}(x)$, де $T_i(x)$ многочлени Чебишова першого роду. Отримані функції є наближеними розв'язками рівняння

$$\lambda f(x)+\pi_x\int_{-1}^{x}dx_1\int_{-1}^{x_1}f(y)dy=0. \quad (1)$$

Дана робота розвиває ідеї попередньої при знаходженні невизначеного інтеграла із верхньою межею, або багатократний такого вигляду інтеграл.

Будемо вважати, що функція / (%) така, що

$$\int_{-1}^{1}f(y)dy=0. \quad (2)$$

Для непарного випадку маємо:

$$\int_{-1}^{1}\varphi_s(y)dy=\int_{-1}^{1}\sum_{i=1}^{n}\beta_i T_{2i-1}(y)dy=0.$$

Для парного випадку маємо:

$$\int_{-1}^{1}\varphi_c(y)dy=\int_{-1}^{1}\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T_{2i}(y)\right]dy=\alpha_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{2\alpha_i}{(2i-1)(2i+1)}.$$

Тому знайдемо таку $\tilde{\varphi}_c(y)$, яка буде задовольняти умову (2). Для цього покладемо

$$\tilde{\varphi}_c(y) = \varphi_c(y) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi_c(y)\,dy,$$

звідки

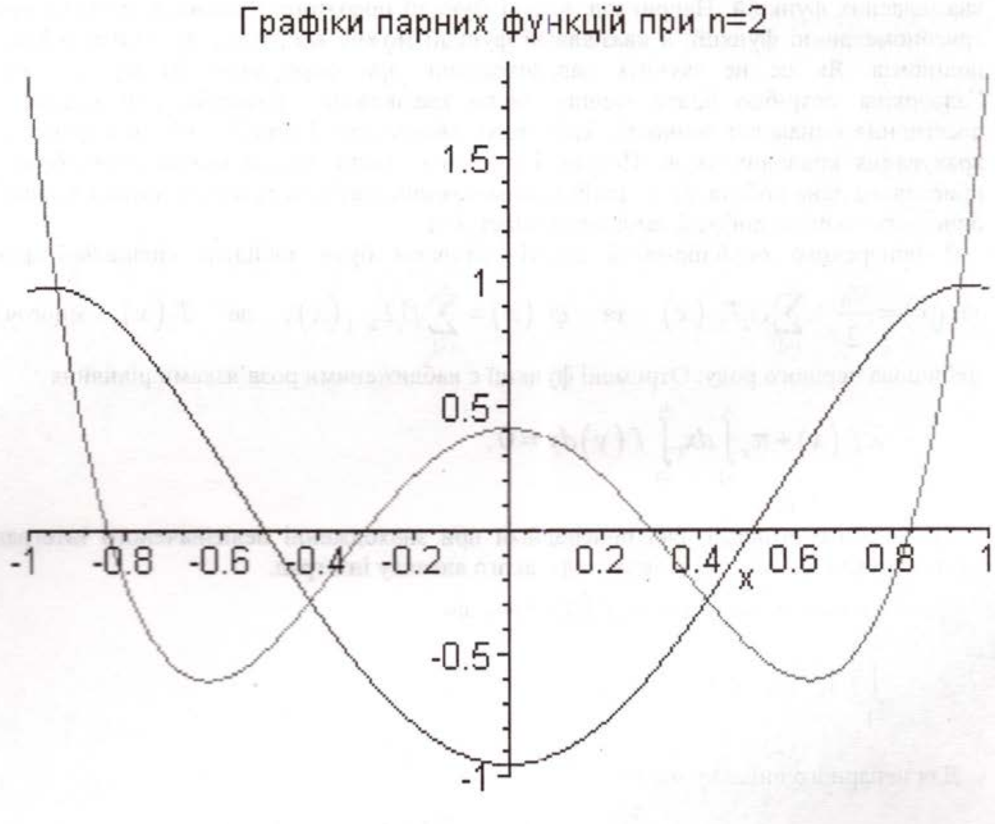
$$\tilde{\varphi}_c(y) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_{2i}(y) - \frac{1}{2}\left[\alpha_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{2\alpha_i}{(2i-1)(2i+1)}\right],$$

або

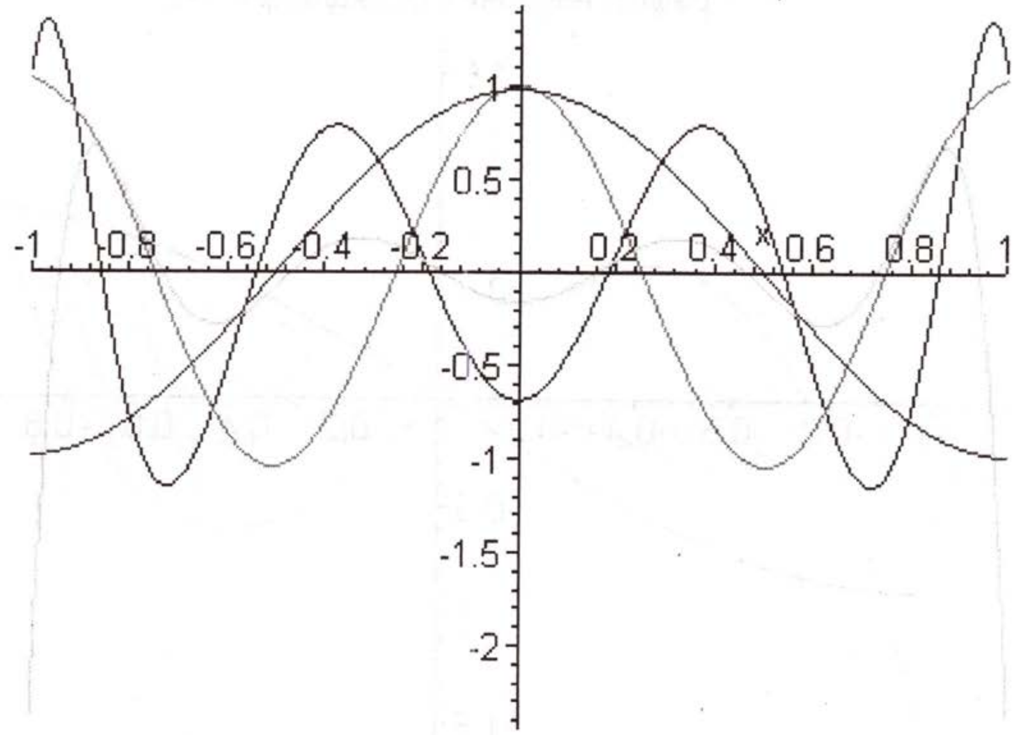
$$\tilde{\varphi}_c(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[T_{2i}(y) + \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}\right].$$

Знайдена остання рівність буде наближеним розв'язком рівняння(1) та задовольняє умову (2).

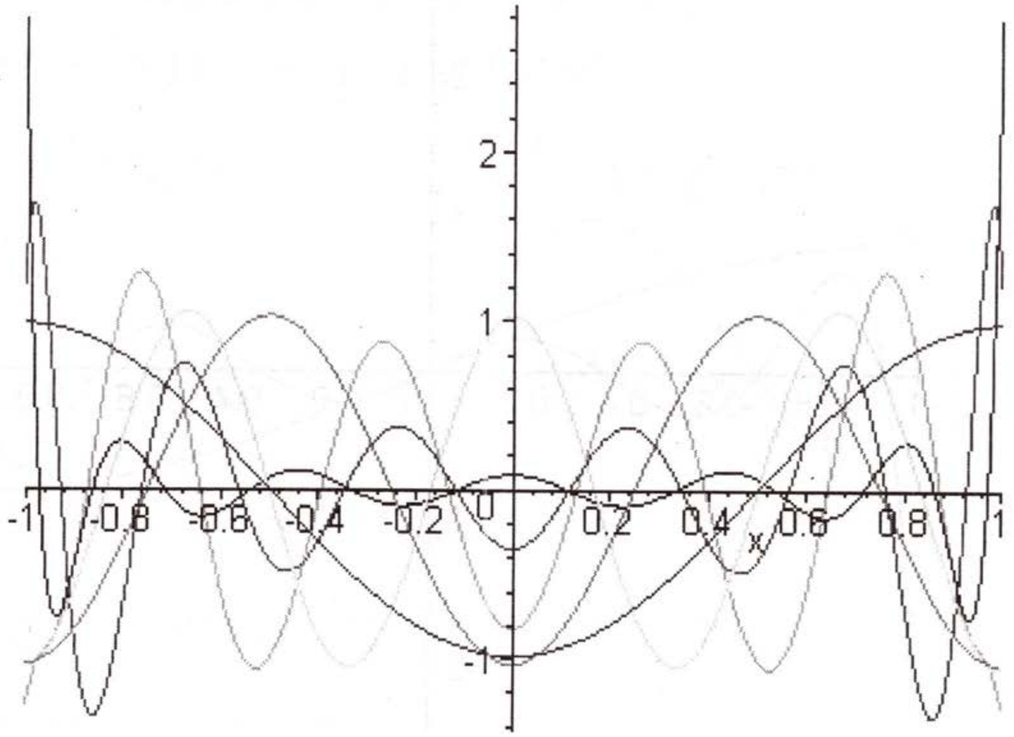
Побудуємо графіки отриманих розв'язків.



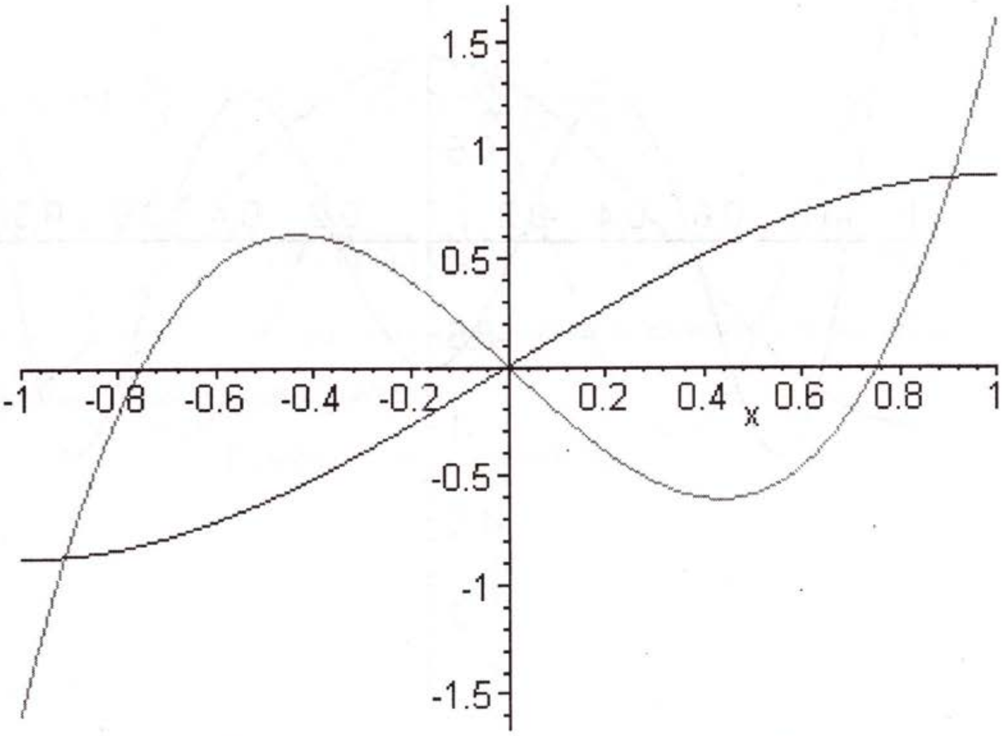
Графіки парних функцій при n=4



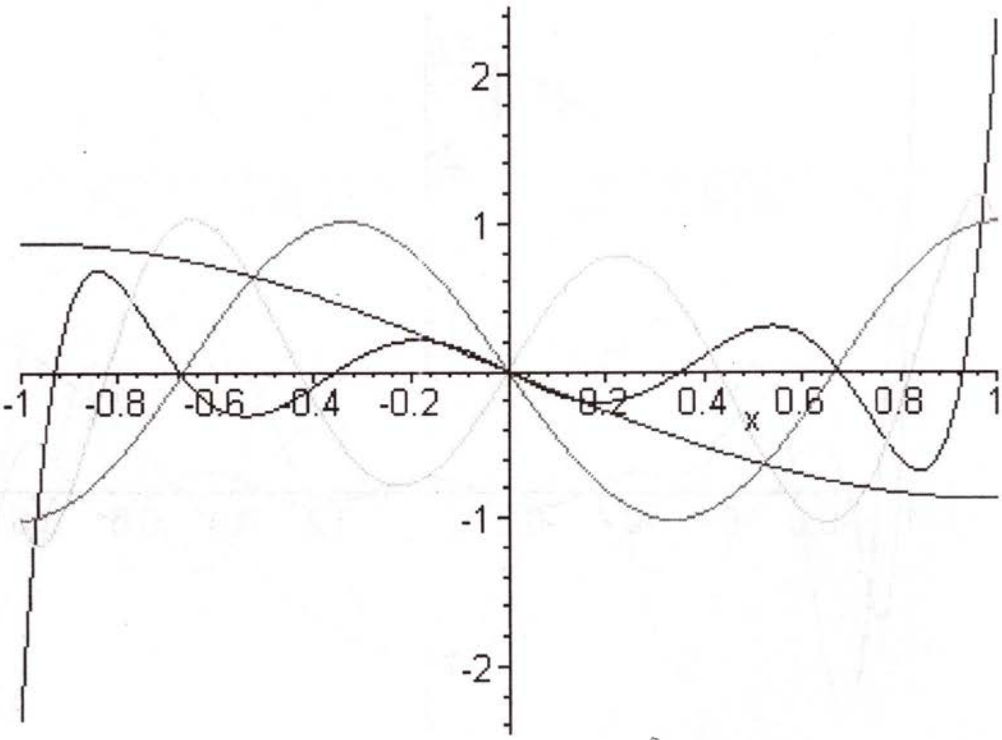
Графіки парних функцій при n=6



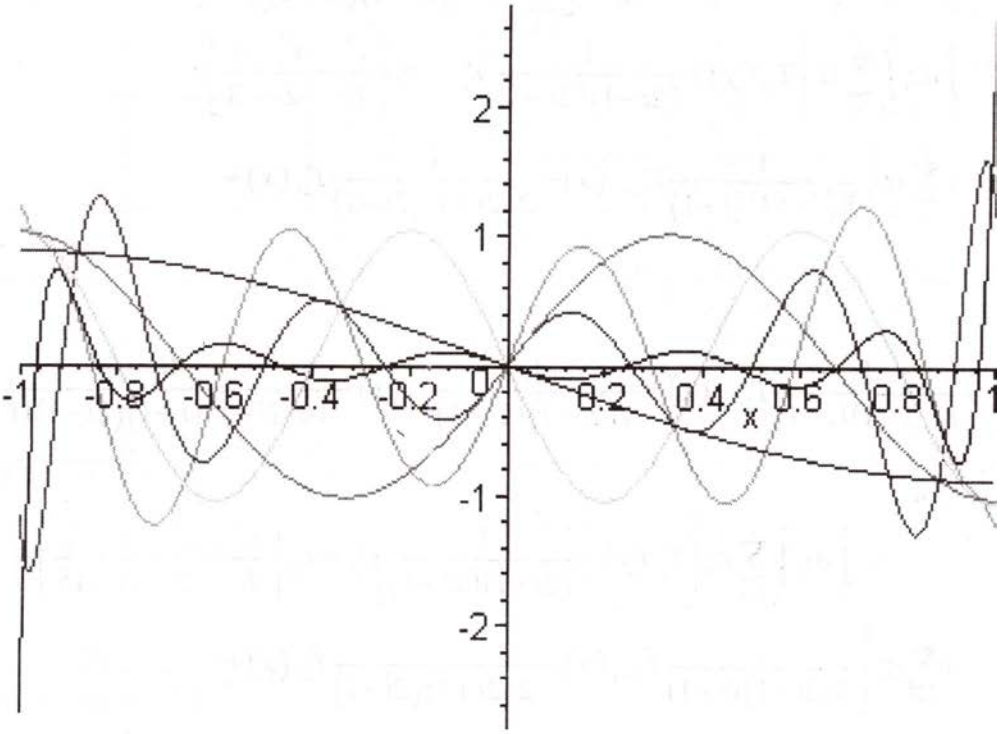
Графіки непарних функцій при n=2



Графіки непарних функцій при n=4



Графіки непарних функцій при n=6



Для кожного із власних значень отримали власну функцію.

Знайдемо $\int\limits_{-1}^{x} dx_1 \int\limits_{-1}^{x_1} \varphi_s(y)dy = \int\limits_{-1}^{x} dx_1 \int\limits_{-1}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \beta_i T_{2i-1}(y)dy$.

$$\int\limits_{-1}^{x} dx_1 \int\limits_{-1}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \beta_i T_{2i-1}(y)dy = \beta_1\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right]+\sum_{i=2}^{n}\beta_i\left[\frac{1}{8i(2i+1)}T_{2i+1}(x)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8i(i-1)}T_{2i-1}(x)+\frac{1}{8(2i-3)(i-1)}T_{2i-3}(x)+\frac{1}{4i(i-1)}T_1(x)+\frac{1}{(2i+1)(2i-3)}\right].$$

Тоді

$$\pi_x \int\limits_{-1}^{x} dx_1 \int\limits_{-1}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \beta_i T_{2i-1}(y)dy = \beta_1\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x}{2}\right]+\sum_{i=2}^{n}\beta_i\left[\frac{1}{8i(2i+1)}T_{2i+1}(x)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8i(i-1)}T_{2i-1}(x)+\frac{1}{8(2i-3)(i-1)}T_{2i-3}(x)+\frac{1}{4i(i-1)}T_1(x)\right].$$

Для парного випадку знайдемо

$$\int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} \tilde{\varphi}_c(y)\,dy = \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[T_{2i}(y) + \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} \right] dy,$$

$$\int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[T_{2i}(y) + \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} \right] dy = \alpha_1 \left[\frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} \right] +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \left[\frac{1}{8(2i+1)(i+1)} T_{2i+2}(x) - \frac{1}{2(2i+1)(2i-1)} T_{2i}(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8(2i-1)(i-1)} T_{2i-2}(x) + \frac{1}{4(2i-1)(2i+1)} T_2(x) - \frac{4i^2+8}{16(2i+1)(i+1)(2i-1)(i-1)} \right]$$

.

Тоді

$$\pi_x \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[T_{2i}(y) + \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} \right] dy = \alpha_1 \left[\frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + \frac{2}{15} \right] +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \left[\frac{1}{8(2i+1)(i+1)} \tilde{T}_{2i+1}(x) - \frac{1}{2(2i+1)(2i-1)} \tilde{T}_{2i}(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8(2i-1)(i-1)} \tilde{T}_{2i-2}(x) + \frac{1}{4(2i-1)(2i+1)} \tilde{T}_2(x) - \frac{4i^2+8}{16(2i+1)(i+1)(2i-1)(i-1)} \right]$$

,

де

$$\tilde{T}_i = \pi_x T_i .$$

Підставимо в рівняння (1) отримані результати. Для непарного випадку матимемо

$$\lambda^{(k)} \sum_{i=1}^{n} \beta_i T_{2i-1}(x) + \pi_x \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \beta_i T_{2i-1}(y)\,dy = \frac{\beta_n}{8n(2n+1)} T_{2n+1}(x),$$

$k = 1, \ldots, n$, (3)

або

$$\pi_x \int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} \varphi_s(y)\,dy = -\lambda^{(k)} \varphi_s(x) + \tau^{(k)} T_{2n+1}(x),\ k = 1, \ldots, n$$

(4)

Для $\lambda^{(k)}$ та $\tau^{(k)}$ побудуємо таблицю значень

n=2		n=4		n=6	
$\lambda^{(1)}=$ 0.03212007426	$\tau^{(1)}=$ 0.01156708614	$\lambda^{(1)}=$ 0.003117732906	$\tau^{(1)}=$ 0.001950909853	$\lambda^{(1)}=$ 0.0007274104585	$\tau^{(1)}=$ 0.0005284284426
$\lambda^{(2)}=$ 0.4053799257	$\tau^{(2)}=$ -0.001507903455	$\lambda^{(2)}=$ 0.01532780957	$\tau^{(2)}=$ -0.002141369658	$\lambda^{(2)}=$ 0.003791450032	$\tau^{(2)}=$ - 0.001056405414
		$\lambda^{(3)}=$ 0.045001971709	$\tau^{(3)}=$ 0.0002704353152	$\lambda^{(3)}=$ 0.008120224206	$\tau^{(3)}=$ -0.0006428307790
		$\lambda^{(4)}=$ 0.4052847401	$\tau^{(4)}=$ 0.2058175887*10^{-6}	$\lambda^{(4)}=$ 0.01621121759	$\tau^{(4)}=$ 0.00007206365050
				$\lambda^{(5)}=$ 0.04503162962	$\tau^{(5)}=$ -0.6311483367*10^{-6}
				$\lambda^{(6)}=$ 0.4052847336	$\tau^{(6)}=$ 0.4684739938*10^{-11}

Для парного випадку матимемо

$$\lambda^{(k)}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left[T_{2i}(x)+\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}\right]+\pi_x\int_{-1}^{x}dx_1\int_{-1}^{x_1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left[T_{2i}(y)+\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}\right]dy=$$

$$=\frac{\alpha_n}{8(n+1)(2n+1)}T_{2n+2}(x),\ k=1,\dots,n, \qquad (5)$$

або

$$\pi_x\int_{-1}^{x}dx_1\int_{-1}^{x_1}\tilde{\varphi}_c(y)dy=-\lambda^{(k)}\tilde{\varphi}_c(x)+\tau^{(k)}T_{2n+2}(x),\ k=1,\dots,n. \qquad (6)$$

Для $\lambda^{(k)}$, $\tau^{(k)}$ побудуємо таблицю значень при

n=2		n=4		n=6	
$\lambda^{(1)}=$ 0.01543487441	$\tau^{(1)}=$ 0.006898337579	$\lambda^{(1)}=$ 0.002056549737	$\tau^{(1)}=$ -0.001304432335	$\lambda^{(1)}=$ 0.0005419605571	$\tau^{(1)}=$ 0.0004110446864
$\lambda^{(2)}=$ 0.1012317922	$\tau^{(2)}=$ -0.002444444269	$\lambda^{(2)}=$ 0.01020851879	$\tau^{(2)}=$ -0.001925061741	$\lambda^{(2)}=$ 0.002862243163	$\tau^{(2)}=$ -0.0008674474787
		$\lambda^{(3)}=$ 0.02530256062	$\tau^{(3)}=$ 0.0004087173272	$\lambda^{(3)}=$ 0.006124463351	$\tau^{(3)}=$ -0.0006381605551
		$\lambda^{(4)}=$ 0.1013212598	$\tau^{(4)}=$ 0.3797012281*10^{-5}	$\lambda^{(4)}=$ 0.01125577617	$\tau^{(4)}=$ 0.0001110495202
				$\lambda^{(5)}=$ 0.02533027058	$\tau^{(5)}=$ -0.2490335886*10^{-5}
				$\lambda^{(6)}=$ 0.1013211835	$\tau^{(6)}=$ -0.1050519394*10^{-8}

ЛІТЕРАТУРА

1. Янчук П.С., Собко В.Г. До побудови нових класів спеціальних многочленів. Психолого-педагогічні основи гуманізації навчально-виховного процесу в школі та вузі. 36. И Наукових праць,-Рівне:Волинські обереги, 2002.
2. Янчук П.С. Аппроксимационный метод для эллиптических и параболических уравнений//Тр. Мат. Ин-та АН СССР.-1987.-180.-С.237-238.
3. Янчук П.С. Использование А-метода при решении эллиптических и параболических уравнений //Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов.-Киев:Ин-т математики.-1989.-С.112-121.