УДК 518:517.944/947

КОМП'ЮТЕРНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Кузьменко А.П.,
Войтишин В.В.,
Гайвук І.А.

Міжнародний університет „РЕГІ" імені академіка Степана Дем'янчука

В роботі презентується алгоритм та система програмного забезпечення розв'язування крайових задач для звичайного диференціального рівняння з розривними коефіцієнтами. Алгоритм побудований на рекурсії Шварца. Для розв 'язування та аналізу задач розроблено програмне середовище, в якому передбачено користувацький режим за опціями майстра задач з відповідним інтерфейсом.

В статье предлагается алгоритм и система программного обеспечения для решения краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения с разрывными коэффициентами. Алгоритм построен на рекурсии Шварца. Для решения и анализа задач разработана программная среда, в которой предусмотрен пользовательский режим за опциями мастера задач с соответствующим интерфейсом.

The algorithm and system of software for solution of boundary value problems for normal differencial equation with explosive coefficients is presented. Algorithm is based on Shwart's recursion. Program environment for solution and analysis problems is worked out. User's regime with options wizard with proper interface isforseek.

Розглянемо наступну' модельну крайову задачу. На відрізку *[a,d]* визначити розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{d}{dx}\left(xk(x)\frac{du}{dx} \right) = 0, \tag{1}$$

що задовольняє крайовим умовам

$$L_1 u(a) = \varphi_1, \tag{2}$$

$$L_4 u(d) = \varphi_4, \tag{3}$$

та умовам

$$[u]_{x=b} = \xi_b, \left[k(x)\frac{du}{dx} \right]_{x=b} = 0, \tag{4}$$

$$[u]_{x=c} = \xi_c, \left[k(x)\frac{du}{dx} \right]_{x=c} = 0, \tag{5}$$

де оператори $L_1, L_4 = 1$ або $\frac{d}{dx}$ (L_1 і L_4 одночасно не $\frac{d}{dx}$),

$$k(x) = \begin{cases} k_1, a \le x \le b, \\ k_2, b \le x \le c, \\ k_3, c \le x \le d, \end{cases} \tag{6}$$

ξ_b, ξ_c – деякі числа.

Зауважимо, що до задачі (1)-(6) зводиться крайова задача Діріхле-Неймана для концентричио неоднорщного кільця [1]. для розв'язування задачі застосуємо насипний

Покладемо

$$u\big|_{x=c}=\varphi_3 \tag{7}$$

(φ_3 – довільне число). Розв'яжемо задачу (1),(2),(4),(7) на відрізку $[a,c]$. Одержимо функцію $V^{(0)}(x),\ x\in[a,c]$.

Покладемо при $\varphi_2 = L_1V^{(0)}(b+0)$

$$u\big|_{x=b}=\varphi_2 . \tag{8}$$

Розв'яжемо задачу (1),(3),(5),(8) для відрізка $[b,d]$. Розв'язок позначимо $W^{(0)}(x),\ x\in[b,d]$.

Покладемо $u\big|_{x=c}=\varphi_3 = L_4W^{(0)}(c-0)$. Розв'яжемо задачу (1),(2),(4),(7) для відрізка $[a,c]$ при такому значенні φ_3. Одержимо розв'язок $V^{(1)}(x),\ x\in[a,c]$. Перевизначимо $u\big|_{x=b}=\varphi_2 = L_1V^{(1)}(b+0)$ і знову розв'язуємо задачу (1),(3),(5),(8) для відрізка $[b,d]$.

Продовжуючи розв'язувати в заданій послідовності зазначені задачі, отримаємо послідовність функцій:

$$V^{(0)}(x),\ W^{(0)}(x),\ V^{(1)}(x),\ W^{(1)}(x),\ \dots . \tag{9}$$

При комп'ютерній реалізації процесу розв'язування задач одержуємо числову послідовність:

$$V^{(0)}(b+0),\ W^{(0)}(c-0),\ V^{(1)}(b+0),\ W^{(1)}(c-0),\ V^{(2)}(b+0),\dots\dots \tag{10}$$

Цей ітераційний процес уточнення розв'язку припиняється, якщо виконаються умови:

$$\begin{cases} \left|V^{(k)}(b+0)-V^{(k-1)}(b+0)\right|<\varepsilon, \\ \left|W^{(k)}(c-0)-W^{(k-1)}(c-0)\right|<\varepsilon \end{cases} \tag{11}$$

(точність $\varepsilon>0$ задається наперед). Тоді покладемо, наприклад,

$$u(x)=\begin{cases} V^{(k)}(x), x\in[a,b], \\ V^{(k)}(x),\ x\in[b,c], \\ W^{(k)}(x), x\in[c,d]. \end{cases} \tag{12}$$

Розроблений алгоритм, очевидно, без змін поширюється і на випадок довільно великої кількості точок розриву коефіцієнта *к* (x).

Рис. 1. Блок-схема реалізації алгоритму альтернуючого методу

Розглянемо блок-схему рекурсивного алгоритму, реалізованого в програмі для знаходження розв'язків крайової задачі, який є узагальненням схеми для довільного числа розривів коефіцієнта (рис.1).

Розв'язування проводиться на відрізку [xi; $x_п$] (в даному випадку передбачається, що координати точок розриву та крайні точки знаходяться в деякому масиві **x),** де n=m+2, m - кількість розривів коефіцієнта (розриви в точках x_2, x_3, $x_п$.i). В алгоритм передаються наступні параметри:

a - індекс крайньої лівої точки в масиві;
b - індекс крайньої правої точки в масиві;
$ф_a$ - значення крайової умови в точці x_a;

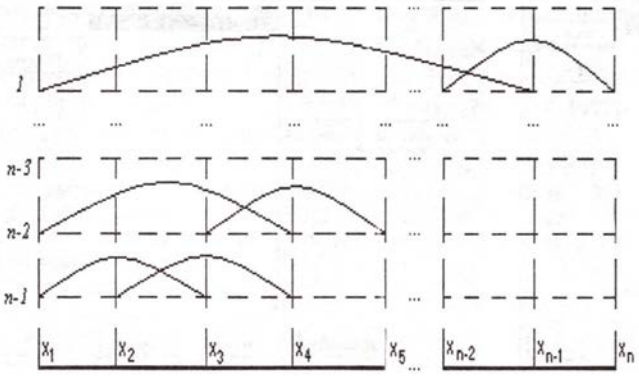

Рис.2 Схема роботи рекурсивного алгоритму.

φ_b – значення крайової умови в точці x_b;

Зауважимо, що змінні φ'_{b-1}, φ'_{b-2} є локальними для процедури, що реалізує алгоритм, тому кожен крок заглиблення рекурсії породжує нові їх екземпляри.

Схема заглиблення рекурсії при роботі алгоритму подана на рис.2, де горизонтальні лінії означають рівень рекурсії.

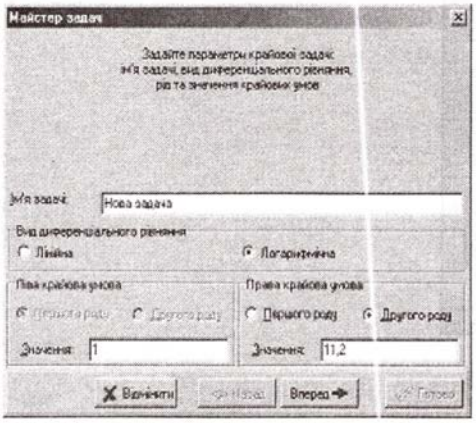

Рис.3 Перший крок

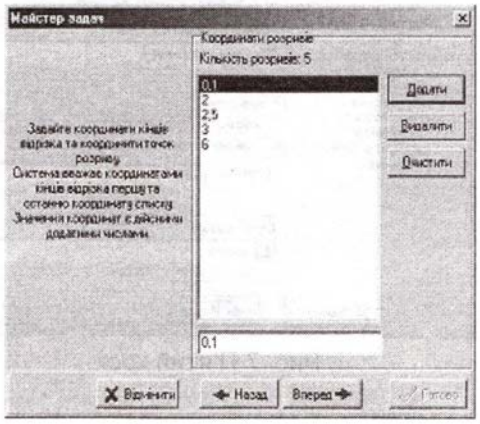

Рис.4 Другий крок

Для розв’язування та аналізу розглянутого класу задач розроблено програмне середовище „Крайові задачі”. Ця система спроектована таким чином, щоб користувач мав змогу одержати розв’язок поставленої задачі у вигляді графіка, порівняти його з розв’язками інших задач, проаналізувати потрібні його частини.

Програма „Крайові задачі” дозволяє ефективно працювати з багатьма системами координат для відображення графіків. В програмі завжди є активною лише одна система координат (відображається в активному дочірньому вікні).

З системою координат пов’язано список задач. В ній відображаються розв’язки всіх задач списку. Користувач має можливість активізувати будь-яку задачу. Слід зауважити, що задача пов’язується лише з однією системою координат. При потребі користувач має можливість пов’язати задачу з іншою системою координат.

Активною задачею в програмі є активна задача активної системи координат. Відносно цієї задачі виконується більшість команд програми.

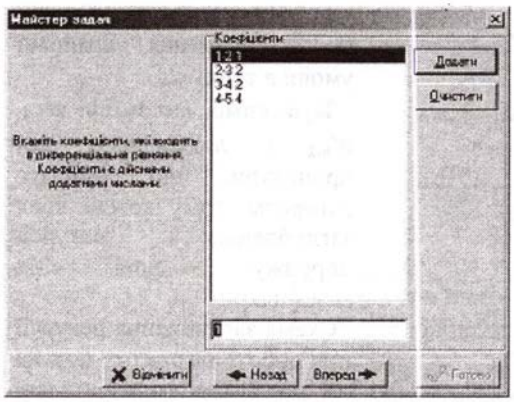

Рис.5. Третій крок

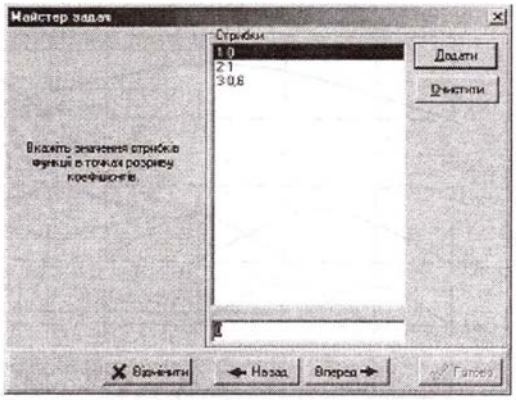

Рис.6. Четвертий крок

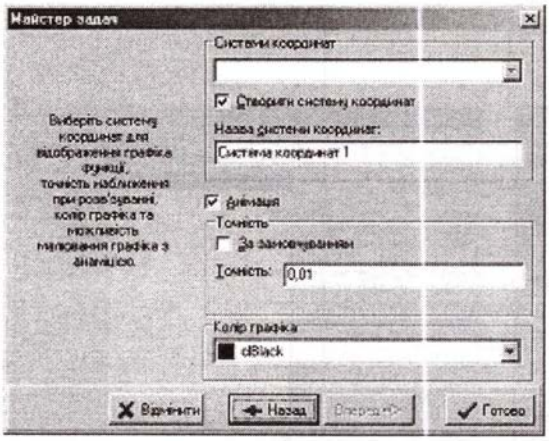

Рис. 7 П'ятий крок

З метою подальшого аналізу та використання одержаних розв'язків передбачено можливість зберігати зображення системи координат у графічному файлі. Умови задач можна зберігати в текстовому файлі.

Для задания та зміни умов крайових задач запрограмовано майстра задач. З його допомогою користувач послідовно може задати необхідні параметри.

Повний сеанс роботи складається з п'яти кроків, на кожному з яких користувач повинен задати групу споріднених параметрів. Вікна майстра задачі на кожному з етапів роботи зображено на рис.3-7.

Таким чином, використання майстра спро-щує та робить послідовним задания параметрів задачі, а також виключає можливість встановлення некоректної умови задачі.

Графіки розв'язків відповідно до встановленої умови відображаються в системі координат. Користувач має змогу одночасно використовувати кілька систем координат, кожна з яких розміщується в окремому дочірньому вікні. В будь-який момент роботи програми завжди активна одна система координат. З системою координат пов'язана інформаційна панель, яка призначена для відображення короткої допоміжної інформації про задачу: тип диференціального рівняння, розв'язок якого шукає програма, та крайових умов, кількість розривів коефіцієнта *к(х)*. Система надає користувачу найпростіші функції перегляду графіків: актуальний розмір, масштабування, тощо.

Отже, програма „Крайові задачі" надає можливість візуалізувати процес знаходження розв'язку задачі. При цьому, вона має переваги, серед яких: можливість одержувати графіки розв'язків вказаних типів крайових задач для довільної скінченої кількості точок

розриву коефіцієнта; перегляд, масштабування, порівняння графіків; сервісні функції щодо організації системи задач в програмі та відповідної організації систем координат; збереження графіків в bmp-форматі, що дає можливість працювати з їх зображенням в графічних редакторах та використовувати їх в різноманітних документах; анімація в процесі уточнення графіків розв’язків.

ЛІТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1997.-656с.
2. В.М.Кузьменко, І.А.Гайвук До розв'язку крайової задачі для одного звичайного дифренціального рівняння// 36. наук. пр. пошукувачів та студентів Міжнародного університету “РЕП" ім. акад. Степана Дем'янчука.-Рівне.-2002.- С.60-63.