

ОСЦИЛЯЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНІЄЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Дейнека О.Ю.

В статті вивчаються умови осциляції розв'язків однієї нелінійної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу.

Розглянемо крайову задачу для системи гіперболічних рівнянь

$$\begin{cases} a \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}, \\ a \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \end{cases} (x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

$$\begin{cases} Cu(0,t) + Dv(0,t) = 0, \\ E(t) \frac{\partial u(l,t)}{\partial t} + F(t)u(l,t) + G(t)v(l,t) = g(u(l,t))q(t), \end{cases} t \in \mathbb{R}^+, \quad (2)$$

де

$u, v \in C^1([0,l] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$; $a, l > 0$; $g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

$CD \neq 0$; $E(t), F(t), G(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$.

Як відомо [1], загальний розв'язок (1) можна подати у вигляді

$$\begin{cases} u(x,t) = (\varphi(t-ax) + \theta(t+ax)), \\ v(x,t) = (\varphi(t-ax) - \theta(t+ax)), \end{cases} \quad (3)$$

тут $\varphi(t), \theta(t)$ – довільні функції з $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

Із врахуванням (3) та заміни $y(t) = \sum_{k=1}^n P_k \theta(t + a_k l)$, при умові

$C \neq -D$, задача (1), (2) зводиться до диференціально-різницевого рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t) + (C+D)^{-1} (D-C) \frac{d}{dt} y(t-2al) + E^{-1}(t) (F(t) - G(t)) y(t) + \\ + E^{-1}(t) (F(t) + G(t)) (C+D)^{-1} (D-C) y(t-2al) = E(t)^{-1} \tilde{g}(u(l,t)), \end{aligned} \quad (4)$$

де $\tilde{g}(u(l,t)) = q(t) g(y(t) + (C+D)^{-1} (C+D) y(t-2al))$.

Зауважимо, що розв'язок (1), (2) виражається через розв'язок (4), (5) таким чином

$$\begin{cases} u(x,t) = (D+C)^{-1} (D-C) y(t-ax-al) + y(t+ax-al), \\ v(x,t) = (D+C)^{-1} (D-C) y(t-ax-al) - y(t+ax-al). \end{cases} \quad (5)$$

Осцилюючим будемо називати розв'язок $u(x,t), v(x,t)$ задачі (1), (2) для якого при кожному фіксованому $x \in [0, \infty)$ виконуються наступні умови:

$$\sup\{u(x,t), t > T\} > 0 \text{ для довільного } T > 0, \quad \text{а)}$$

$$\sup\{v(x,t), t > T\} > 0 \text{ для довільного } T > 0, \quad \text{б)}$$

$$u(x, t_i) = 0 \text{ і } t_i \rightarrow \infty \text{ при } i \rightarrow \infty, \quad \text{в)}$$

$$v(x, t_j) = 0 \text{ і } t_j \rightarrow \infty \text{ при } j \rightarrow \infty. \quad \text{г)}$$

Для доведення теореми 2 будемо використовувати твердження. Теорема I. (ЗІ. Розв'язок-півніння

$$\frac{d}{dt} [x(t) - \lambda x(t-\tau)] + \sum_{i=1}^N q_i(t) f_i(x(g_i(t))) = 0$$

при наступних умовах:

а) $0 < \lambda < 1, \tau$ – додатне число,

б) $q_i: [a, \infty) \rightarrow (0, \infty), 1 \leq i \leq N$ – неперервні функції,

в) $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq N$ – неперервні неспадні функції, що задовольняють умову $f'_i(y) > 0, y \neq 0$,

г) $g_i: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq N$ – неперервні неспадні функції, що задовольняють умови $\lim_{t \rightarrow \infty} g_i(t) = \infty$ і $g_i(t) < t$ при $t \geq a$,

буде осцилюючим тоді і тільки тоді, коли $\int_0^m \frac{dy}{f_i(y)} < \infty$ при кожному

$1 \leq i \leq N$ і $m \neq 0$.

Лема. Для довільних неперервних функцій $x(t), y(t)$ та деяких додатних чисел a, A при умові $y(t) + c \sup_{t \in [t-A, t]} x(t) = x(t)$ із осциляції функції $x(t)$ випливає осциляція функції $y(t)$.

Доведення лема. Дійсно, якщо функція $x(t)$ осцилює то існує нескінченна послідовність нулів цієї функції, тому, або в цих точках

$y(t) = y(t - \Delta) = 0$, або $y(t)y(t - \Delta) < 0$. Остання нерівність, на підставі неперервності функції $y(t)$, означає її осциляцію.

Сформулюємо основну теорему.

Т е о р е м а 2. Нехай виконуються умови

а)

$$0 < (C - D)(C + D)^{-1} < 1,$$

б)

$g(u)$ – неперервна неспадна функція , для якої виконується умова $ug(u) > 0$ при $u \neq 0$,

в)

$$\int_{\alpha}^{\infty} E^{-1}(t) q_1(t) dt = -\infty, (\alpha > 0),$$

тоді розв'язок задачі (1), (2) буде осцилюючим тоді і тільки тоді,

$$\text{коли } \int_0^m \frac{dy}{g(y)} < \infty \quad (m \neq 0).$$

Доведення теореми. Згідно з твердженням леми із осциляції розв'язків задачі (1), (2) впливає осциляція розв'язку рівняння (4), і навпаки із осциляції розв'язку рівняння (4) впливає осциляція розв'язку задачі (1), (2). Далі , якщо покласти

$$q_1(t) = E^{-1}(t)(F(t) - G(t))$$

$$f_1(x) = x, \quad g_1(t) = t$$

$$, q_2(t) = E^{-1}(t)(F(t) - G(t))(C + D)^{-1}(D - C), \quad f_2(x) = x, \quad g_2(t) = t - 2at,$$

$$g_3(t) = E^{-1}(t)\tilde{g}(t), \quad f_3(x) \equiv 1, \text{ тоді на підставі твердженням теореми 1}$$

робимо висновок про те, що умови теореми 2 є необхідними і достатніми для осциляції розв'язку рівняння (4) а, отже і задачі (1), (2).

ЛІТЕРАТУРА

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. 4.-М: Физматгиз, 1974.-352с.
2. Шувело В. Н. Осцилляция решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом- Киев: «Наукова думка», 1978.-154с.
3. Иванов А. Ф., Кусано Т. Колеблемость решений одного класса функционально-дифференциальных уравнений первого порядка нейтрального типа//Укр.мат.журн., 1989, т. 41 №10.-С1370-1375.