УДК 517.518.82:517.518.36:517.518.45

Ліпська Наталія, ст. магістратури факультету кібернетики; науковий керівник – к.ф.-м.н., професор Янчук П. С. (Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем'янчука, м. Рівне)

2D МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ПОВІЛЬНИХ ТЕЧІЙ РІДИНИ

Анотація. *У статті досліджено новий метод квазі-спектральних поліномів до 2d комп'ютерного моделювання повільних течій нестискуваної в'язкої рідини. Вибрано математичну модель у вигляді системи рівнянь з частинними похідними Стокса, невідомим в якій є компоненти швидкості та тиску. Встоновлено, що метод квазі-спектральних поліномів ґрунтується на застосуванні розвинення в ряди Фур'є функцій двох змінних за ортогональними квазі-спектральними поліномами.*
Ключові слова*: комп'ютерне моделювання, моделювання, рідина, в'язкість.*

Аннотация. *В статье исследован новый метод квази-спектральних полиномов к 2d компьютерному моделированию медленных течений несжимаемой вязкой жидкости. Выбрано математическую модель в виде системы уравнений с частными производными Стокса, неизвестным в которой есть компоненты скорости и давления. Встоновлено, что метод квази-спектральних полиномов основывается на применении разложения в ряды Фурье функций двух переменных с ортогональным квази-спектральными полиномами.*
Ключевые слова: *компьютерное моделирование, моделирование, жидкость, вязкость*

Annotation. *This article applies a new method of quasi spectral polynoms to 2d computer modeling of low-velocity incompressible viscous fluid. It was defined the mathematical model in the form of Stokes' partial differential equations, in which the unknown is a velocity and pressure components. The method of quasi spectral polynoms bases on the use of expansion in Fourier series of functions of two variables by orthogonal quasi-spectral polynoms.*
Keywords: *computer modelling, simulation, fluid, viscosity.*

Для повного описання руху рідини використовується повна система рівнянь Нав'є-Стокса. В цю систему входять рівняння динаміки рідин, рівняння нерозривності та рівняння енергії. В поданій роботі ми обмежимося рівняннями динаміки, в яких опущені нелінійні члени та рівнянням нерозривності. Так виникає спрощена математична модель руху рідини, яка називаєься задачею Стокса. За допомогою розв'язування задачі

Стокса знаходяться компоненти швидкості та тиск. При цьому необхідно задати крайові умови для компонент швидкості. Приймемо ще одне спрощення, а саме розглядатимемо задачу в прямокутнику. Отже, будемо вивчати крайову задачу Стокса: два рівняння динаміки для вектора $z=(u,v)$ швидкості

$$\begin{aligned}
&-\left(h_x{}^2 u_{xx} + h_y{}^2 u_{yy}\right) + h_x p_x = f, \\
&-\left(h_x{}^2 v_{xx} + h_y{}^2 v_{yy}\right) + h_y p_y = q, \\
&-1 < x, y < 1,
\end{aligned} \tag{0.1}$$

рівняння нерозривності

$$h_x u_x + h_y v_y = g, \quad -1 \le x, y \le 1. \tag{0.2}$$

На межі області ставляться крайові умови першого роду

$$u = \varphi, \quad v = \psi \tag{0.3}$$

Будемо вважати, що крайові умови (0.3) узгоджені з рівнянням нерозривності в усіх кутових точках $(\pm 1, \pm 1)$ квадрата $-1 \le x, y \le 1$. Будемо вважати, що задача (0.1)-(0.3) має єдиний розв'язок u, v, p при умові, що

$$p(-1,-1) = p_0 \,. \tag{0.4}$$

Опишемо коротко базисні функції, які ми використовуємо для розв'язування цієї задачі. Такі функції вперше були відкриті П. Янчуком. [6–8]. За цією тематикою опубліковано тисячі статей та монографій. В даній роботі застосовуються ряди Фур'є за квазі-спектральними поліномами та квазіспектральний метод, введені та конструктивно побудовані П. Янчуком. (див. [6–8], де наведено список літератури)

Квазіспектральні поліноми першого та другого роду

Внутрішні квазіспектральні поліноми першого роду $K_i^\circ(x)$ задовольняють псевдо-спектральні рівності, які мають вигляд

$$\frac{d^2}{dx^2} K_i^\circ(x) = -\lambda_i^\circ K_i^\circ(x) + \tau_i^\circ K_{2n+2-i'}^\circ(x), \quad i = 1, \ldots, 2n,\ i' = i \bmod 2, \tag{0.5}$$

крайові поліноми першого роду дорівнюють

$$K_{2n+2}^{\circ}(x)=\frac{d}{dx}\overline{P}_{2n+2}(x), \quad K_{2n+1}^{\circ}(x)=\frac{d}{dx}\overline{P}_{2n+1}(x), \qquad (0.6)$$

де $\overline{P}_{2n+1}(x), \overline{P}_{2n+2}(x)$ – поліноми Лежандра.

При цьому квазіспектральні поліноми $K_i^{\circ}(x), \quad i=0,...,2n+2$ утворюють ортонормоване сімейство функцій, тобто

$$\int_{-1}^{1} K_i^{\circ}(x) K_j^{\circ}(x)\,dx=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}.$$

Квазіспектральними поліномами другого роду називаються поліноми

$$\begin{aligned}&K_0^{\square}=1/\sqrt{2},\\ &K_i^{\square}(x)=\left(1/\sqrt{\lambda_i^{\circ}}\right)\frac{d}{dx}K_i^{\circ}(x), \quad i=1,\ldots,2n,\\ &K_{2n+1}^{\square}(x)=\hat{P}_{2n+1}(x), \quad K_{2n+2}^{\square}(x)=\hat{P}_{2n+2}(x)\end{aligned} \qquad (7)$$

де $\hat{P}_m(x)$ ортонормований поліном Лежандра, тобто $\left\|\hat{P}_m(x)\right\|=1$.

При цьому квазіспектральні поліноми $K_i^{\square}(x), \quad i=0,...,2n+2$ утворюють ортонормоване сімейство функцій і зокрема, квазіспектральні поліноми другого роду задовольняють умови ортогональності вигляду

$$\int_{-1}^{1} K_i^{\square}(x)\,dx=0, \quad i=1,\ldots,2n$$

Розглянемо ряди Фур'є, базисом для яких служать квазі-спектральні поліноми.

Подання функцій u, v, p *квазіспектральними рядами Фур'є.*
Функціям u, v, p поставимо у відповідність скінчені ряди Фур'є за квазіспектральними поліномами

$$u^n = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=1}^{2n+2} u_{i,j}^{\square\circ} K_i^{\square}(x) K_j^{\circ}(y), \quad u_{i,j}^{\square\circ} = \int_{-1}^{1} u K_i^{\square}(x) K_j^{\circ}(y)\, dxdy,$$

$$v^n = \sum_{i=1}^{2n+2} \sum_{j=0}^{2n} v_{i,j}^{\circ\square} K_i^{\circ}(x) K_j^{\square}(y), \quad v_{i,j}^{\circ\bullet} = \int_{-1}^{1} u K_i^{\circ}(x) K_j^{\square}(y)\, dxdy, \qquad (0.8)$$

$$p^n = \sum_{i=1}^{2n+2} \sum_{j=1}^{2n+2} p_{i,j}^{\circ\circ} K_i^{\circ}(x) K_j^{\circ}(y), \quad p_{i,j}^{\circ\circ} = \int_{-1}^{1} u K_i^{\circ}(x) K_j^{\circ}(y)\, dxdy.$$

Похідним функцій u, v, p поставимо у відповідність аналогічні ряди:

$$u_x{}^n = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=1}^{2n+2} [u_x]_{i,j}^{\square\circ} K_i^{\square}(x) K_j^{\circ}(y), \quad [u_x]_{i,j}^{\square\circ} = \int_{-1}^{1} u_{xx} K_i^{\square}(x) K_j^{\circ}(y)\, dxdy,$$

$$u_{xx}{}^n = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=1}^{2n+2} [u_{xx}]_{i,j}^{\square\circ} K_i^{\square}(x) K_j^{\circ}(y), \quad [u_{xx}]_{i,j}^{\square\circ} = \int_{-1}^{1} u_{xx} K_i^{\square}(x) K_j^{\circ}(y)\, dxdy$$

і т.д.

Нехай $\mathrm{M}^{n,m}$ означає множину всіх поліномів з дійсними коефіцієнтами c_{ij} вигляду

$$z = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} c_{ij} x^i y^j .$$

Звісно поліном u^n (0.8) дає найкраще середньоквадратичне наближення для функції u в $\mathrm{M}^{n,m}$, тобто

$$\left\| u - u^n \right\| = \inf_{z \in \mathrm{M}^{2n,2n+1}} \left\| u - z \right\|,$$

де

$$\left\| u \right\|^2 = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} u^2(x)\, dx$$

і аналогічно для інших функцій.

В подальшому опускатимемо індекс n, оскільки будемо вважати його зафіксованим раз і назавжди. Тут вважається, що n не менше двох. Випадок $n = 1$ розглядається простіше ніж даний, але його ми опускаємо, так що функції p ставимо у відповідність поліном щонайменше 5 степеня по кожній із змінних.

Роль крайових умов у побудові рядів Фур'є. Частину коефіцієнтів поліномів (0.8) можна обчислити прямо із крайових умов (0.3). Такими є коефіцієнти $u_{i,2n+1}^{\square\circ}, u_{i,2n+2}^{\square\circ}, v_{2n+1,j}^{\circ\square}, v_{2n+2,j}^{\circ\square}$. Для їх обчислення зручно ввести оператори $\Delta_x^i, \Delta_y^j, \nabla_x^i, \nabla_y^j$, які визначаються формулами

$$
\begin{aligned}
&\Delta_x^i u = u(1,y) - (-1)^i u(-1,y) = \varphi(1,y) - (-1)^i \varphi(-1,y),\\
&\Delta_y^j u = u(x,1) - (-1)^j u(x,-1) = \varphi(x,1) - (-1)^j \varphi(x,-1),\\
&\nabla_x^i u = u(1,y) + (-1)^i u(-1,y) = \varphi(1,y) + (-1)^i \varphi(-1,y),\\
&\nabla_y^j u = u(x,1) + (-1)^j u(x,-1) = \varphi(x,1) + (-1)^j \varphi(x,-1).
\end{aligned} \qquad (0.9)
$$

Перші два коефіцієнти Фур'є обчислюються за відомими значеннями функції u при $y = \pm 1$

$$
u_{i,N-j'}^{\square\circ} = d_{j'} \left(\Delta_y^j u\right)_i^\circ, \quad \left(\Delta_y^j u\right)_i^\circ = \int_{-1}^{1} \Delta_y^j u K_i^\square(x)\,dx, \quad i = 0,\ldots 2n, \qquad (0.10)
$$

де, $d_{i'} = 1/\sqrt{(2n+2-i')(2n+3-i')}, \quad i' = 0,1$, а два інші за відомими значеннями v при $x = \pm 1$:

$$
v_{N-i',j}^{\circ\square} = d_{i'} \left(\Delta_x^i v\right)_j^\circ, \quad \left(\Delta_x^i u\right)_i^\circ = \int_{-1}^{1} \Delta_x^i u K_j^\square(y)\,dy, \quad j = 0,\ldots 2n, \qquad (0.11)
$$

При такому виборі цих коефіцієнтів автоматично задовольнятимуться крайові умови (0.3) при $y = \pm 1$ для u та при $x = \pm 1$ для v в тому випадку, коли ці функції є поліномами і наближено у випадку довільних функцій. Для того щоб задовольнити крайові умови (0.3) для функції u при $x = \pm 1$, припустимо, що u поліном, який подається у вигляді

$$
u = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=1}^{2n+2} u_{i,j}^{\square\circ} K_i^\square(x) K_j^\circ(y) \qquad (0.12)
$$

Тоді,

$$
\nabla_x^i u = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=1}^{2n+2} u_{i,j}^{\square\circ} \nabla_x^i K_i^\square K_j^\circ(y) =
$$

$$
\sum_{j=1}^{2n+2} \left(\sum_{i=0}^{n} \sigma_{i',i} u_{2i-i',j}^{\square\circ} \right) K_j^\circ(y)
$$

де

$$\sigma_{i',i} = \nabla_x^i K_{2i-i'}^{\square} . \qquad (0.13)$$

Оскільки квазіспектральні поліноми для парного індексу парні, а для непарного індексу непарні, для крайових умов для u при $x = \pm 1$ маємо лінійні рівняння

$$\sum_{i=0}^{n} \sigma_{i',i} u_{2i-i',j}^{\square\,\circ} = \nabla_x^i u_j^\circ, \quad j = 1,\ldots,2n, \quad j' = 0,1, \qquad (0.14)$$

і аналогічні рівняння для v при $y = \pm 1$:

$$\sum_{j=0}^{n} \sigma_{j',j} v_{i,2j-j'}^{\circ\,\square} = \nabla_y^j v_i^\circ, \; i = 1,\ldots,2n, \; j' = 0,1 \qquad (0.15)$$

Числа $\nabla_x^i u_j^\circ, \nabla_y^j v_i^\circ$ визначаються крайовими умовами (0.3), а значить обчислюються із крайових умов. Коефіцієнти Фур'є поліномів (0.8), крім коефіцієнтів (0.10), (0.11), знаходитимемо із алгебраїчних рівнянь, які нижче побудуємо. Прямо із крайових умов в (0.10), (0.11)знаходиться $8n+4$ коефіцієнтів Фур'є. Крім цього є $8n$ рівнянь (0.14)–(0.15), які випливають із крайових умов. Всього в (0.8) є $12n^2 + 20n + 8$ коефіцієнтів Фур'є, а знайти із алгебраїчних рівнянь потрібно решту $12n^2 + 4n + 3$.

Виникає питання як за відомим розвиненням в ряд Фур'є деякої функції двох змінних знайти розвинення перших та других її похідних.

Формули диференціювання в коефіцієнтах Фур'є.

Між коефіцієнтами Фур'є функцій та їх похідних існує простий зв'язок для кожної із систем квазіспектральних поліномів. Вкажемо деякі найважливіші з них.

Формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є других похідних відносно ортогонально базису із поліномів першого роду

$$u_{xx,i}^\circ = -\lambda_i^\circ u_i^\circ + d_\circ^i \Delta^i u, \quad i = 1,\ldots,2n \qquad (0.16)$$

Формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є других похідних відносно ортогонально базису із поліномів другого роду

$$u_{xx,i}^{\square} = -\lambda_i^{\square} u_i^{\square} + d_{\square}^i \Delta^i u_x, \quad i = 0,\ldots,2n \qquad (0.17)$$

Формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є перших похідних відносно ортогонально базису із поліномів першого роду

$$u^{\circ}_{x,i} = -\mu^{\circ}_{i} u^{\square}_{i-1},\ \mu^{\circ}_{i} = \sqrt{\lambda^{\circ}_{i}} \tag{0.18}$$

Формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є перших похідних відносно ортогонально базису із поліномів першого роду

$$u^{\square}_{x,i} = \mu^{\square}_{i} u^{\circ}_{i} + d^{i}_{\square} \Delta^{i} u, \quad i = 0,\ldots,2n, \tag{0.19}$$

Рівняння динаміки.

Переходячи до коефіцієнтів Фур'є рівняннях динаміки, дістанемо

$$\begin{aligned} &-\upsilon\left(\left[u_{xx}\right]^{\square\ \circ}_{i,j} + \left[u_{yy}\right]^{\square\ \circ}_{i,j}\right) + \left[p_{x}\right]^{\square\ \circ}_{i,j} = f^{\square\ \circ}_{i,j}, \quad i = 0,\ldots,2n, \quad j = 1,\ldots,2n \\ &-\upsilon\left(\left[v_{xx}\right]^{\circ\ \square}_{i,j} + \left[v_{yy}\right]^{\circ\ \square}_{i,j}\right) + \left[p_{y}\right]^{\circ\ \square}_{i,j} = q^{\circ\ \square}_{2i,2j}, \quad i = 1,\ldots,2n, \quad j = 0,\ldots,2n \end{aligned} \tag{0.20}$$

Виконуючи тут диференціювання в коефіцієнтах Фур'є за формулами (0.16)–(0.19)

$$\begin{aligned} &-\upsilon\left(\left(-\lambda^{x}_{i} u^{\square\ \circ}_{i,j} + d^{i}_{\circ x} \Delta^{i}_{x} u^{\circ}_{x,j}\right) + \left(-\lambda^{y}_{j} u^{\square\ \circ}_{i,j} + d^{j}_{\circ y} \Delta^{j}_{y} u^{\square}_{i}\right)\right) + \\ &+\left(\mu^{x}_{i} p^{\circ\ \circ}_{i,j} + d^{i}_{\square x} \Delta^{i}_{x} p^{\circ}_{j}\right) = f^{\square\ \circ}_{i,j}, \\ &-\upsilon\left(\left(-\lambda^{x}_{i} v^{\circ\ \square}_{i,j} + d^{i}_{\circ x} \Delta^{i}_{x} v^{\square}_{y,2j}\right) + \left(-\lambda^{y}_{j} v^{\circ\ \square}_{i,j} + d^{j}_{\square y} \Delta^{j}_{y} v^{\circ}_{y,i}\right)\right) + \\ &+\left(\mu^{y}_{j} p^{\circ\ \circ}_{i,j} + d^{j}_{\square y} \Delta^{j}_{y} p^{\circ}_{i}\right) = q^{\circ\ \square}_{i,j} \end{aligned}$$

Залишимо зліва члени з невідомими коефіцієнтами Фур'є:

$$\begin{aligned} &\upsilon\left(\lambda^{\square}_{i} + \lambda^{\circ}_{j}\right) u^{\square\ \circ}_{i,j} + \left(\mu_{i} p^{\circ\ \circ}_{i,j} + d^{i}_{\square} \Delta^{i}_{x} p^{\circ}_{j}\right) = F^{\square\ \circ}_{i,j}, \quad i = 0,\ldots,2n,\ j = 1,\ldots,2n, \\ &\upsilon\left(\lambda^{\circ}_{i} + \lambda^{\square}_{j}\right) v^{\circ\ \square}_{i,j} + \left(\mu_{j} p^{\circ\ \circ}_{i,j} + d^{j}_{\square} \Delta^{j}_{y} p^{\circ}_{i}\right) = Q^{\circ\ \square}_{i,j}, \quad i = 1,\ldots,2n,\ j = 0,\ldots,2n, \end{aligned} \tag{0.21}$$

де

$$\begin{aligned} F^{\square\ \circ}_{i,j} &= f^{\square\ \circ}_{i,j} + \upsilon\left(d^{j}_{\circ y} \Delta^{j}_{y} u^{\square}_{i} + d^{i}_{\square x} \Delta^{i}_{x} u^{\circ}_{x,j}\right) \\ Q^{\circ\ \square}_{i,j} &= q^{\circ\ \square}_{i,j} + \upsilon\left(d^{i}_{\circ x} \Delta^{i}_{x} v^{\square}_{j} + d^{j}_{\square y} \Delta^{j}_{y} v^{\circ}_{y,i}\right) \end{aligned} \tag{0.22}$$

Коефіцієнти Фур'є $u_{i,N-i'}^{\Box\,\circ}$ та $v_{N-j',j}^{\circ\,\Box}$ будемо називати крайовими першого роду, бо вони прямо знаходяться із крайових умов першого роду для функцій u та v відповідно, при цьому для перших використовуються значення при $y=\pm1$, а для других при $x=\pm1$.

Рівняння для тиску. Функцію p можна знайти із рівняння

$$p_{xx}+p_{yy}=G, \tag{0.23}$$

де

$$G=f_x+q_y+\upsilon\left(g_{xx}+g_{yy}\right)\cdot \tag{0.24}$$

Яке при $g=0$ перетворюється в рівняння

$$p_{xx}+p_{yy}=f_x+q_y \tag{0.25}$$

Справді, диференціюючи перше з рівнянь (0.1) по x, а друге по y, дістанемо

$$p_{xx}+p_{yy}=f_x+q_y+\upsilon\left(g_{xx}+g_{yy}\right)$$

Перейдемо до коефіцієнтів Фур'є першого роду по обох змінних в рівнянні (0.23) для функції тиску

$$\left[p_{xx}\right]_{i,j}^{\circ\;\circ}+\left[p_{yy}\right]_{i,j}^{\circ\;\circ}=G_{i,j}^{\circ\;\circ}. \tag{0.26}$$

Виконаємо диференціювання в коефіцієнтах Фур'є і для парних індексів по обох змінних дістанемо алгебраїчні рівняння

$$-\left(\lambda_i^x+\lambda_j^y\right)p_{i,j}^{\circ\;\circ}-d_{\circ x}^i\Delta_x^i p_j^{\circ}-d_{\circ y}^j\Delta_y^j p_i^{\circ}=G_{i,j}^{\circ\;\circ},\quad i=1,...,2n,\quad j=1,...,2n, \tag{0.27}$$

де,

$$G_{i,j}^{\circ\;\circ}=-\mu_i^x f_{i,j}^{\Box\;\circ}-\mu_j^y q_{i,j}^{\circ\;\Box}-\left(\lambda_i^x+\lambda_j^y\right)g_{i,j}^{\circ\;\circ}+ \\ d_{\circ x}^i\Delta g_j^{\circ}+d_{\circ y}^j\Delta_y^j g_i^{\circ}. \tag{0.28}$$

Рівняння для тиску (0.23) дало нам $4n^2$ алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів Фур'є.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь для обчислення коефіцієнтів Фур'є обмеження функції на краю області.

Для коефіцієнтів Фур'є $p_j^1 = \Delta_x^i p_{2j-j'}^{\circ},\ p_i^2 = \Delta_y^j p_{2i-i'}^{\circ},\ i,\ j = 1,\dots,n$ справджуються формули

$$\begin{aligned} p_j^1 + A_{j,i} p_i^2 &= F_j^x, \\ B_{i,j} p_j^1 + p_i^2 &= F_i^y. \end{aligned} \tag{0.29}$$

де, числа обчислюються $A_{i,j},\ B_{i,j}$ через коефіцієнти Фур'є відомих функцій із постановки задачі Стокса, точніше $\varphi, \psi,\ f, q, g$.

Застосування квазі-спектральних поліномів введених П. Янчуком, дало змогу суттєво спростити обчислювальні затрати на розв'язування задачі Стокса. Комп'ютерні програми, які ґрунтуються на застосуванні методу квазі-спектральних поліномів виграють в економії оперативної та постійної пам'яті комп'ютера і є досить швидкими. Крім того ці методи є ненасиченими. Це означає, що якщо розв'язок є більш гладким, то і якість наближення відповідно покращується. Для розв'язків, які є поліномами, метод їх відновлює з машинною точністю.

1. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышова / С. Пашковский. – М. : Наука. – 1983. – 384 с. **2.** Янчук П. С. Использование А-метода при решении эллиптических и параболических уравнений / П. С. Янчук // Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов. – Киев, 1989. – С. 112–121. **3.** Янчук П. С. Квазіспектральні многочлени та крайові задачі / П. С. Янчук // Волинський математичний вісник. – 1999. – Вип. 6. – С. 183–187. **4**. Янчук П. С. Метод многочленних рядів Фур'є для задачі Діріхле для рівняння Пуассона в квадраті $[-1,1]\times[-1,1]$ / П. С. Янчук // Волинський математичний вісник. – 2000. – Вип. 7. – С. 193–208. **5**. Янчук П. С. Поліноміальна апроксимація розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона з неоднорідними крайовими умовами / П. С. Янчук // Волинський математичний вісник. – 2011. – Вип. 8 (17). – С. 213–239.