УДК 517.518.82:517.518.36:517.518.45

Янчук П. С., к.ф.-м.н., професор (Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем'янчука)

ШВИДКІ МАШИННІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ПОТОКУ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ В 2D ОБЛАСТІ

Анотація. *В статті метод квазіспектральних поліномів застосовано до побудови швидких наближень розв'язку крайової задачі Стокса для системи еліптичних рівнянь. Розкрито, що цей метод ґрунтується на використанні рядів Фур'є за ортогональними квазі-спектральними поліномами. Показано, що тиск визначається як розв'язок рівняння Пуассона, а коефіцієнти Фур'є граничної функції для тиску знаходяться з системи лінійних рівнянь; решту коефіцієнтів вектора швидкості та функції тиску визначаються з діагональної системи лінійних рівнянь.*
Ключові слова*: моделювання, проблема Стокса, квазіспектральні поліноми, апроксимація Фур'є, апроксимація поліноми.*

Аннотация. *В статье метод квазиспектральных полиномов применен к построению полиномиальной аппроксимации решения краевой задачи для системы уравнений Стокса. Раскрыто, что этот метод основан на использовании рядов Фурье в ортогональных квази-спектральных полиномах. Обосновано, что давление определяется как решение уравнения Пуассона, а коэффициенты Фурье граничного условия для давления находятся из системы линейных уравнений; остальные коэффициенты для вектора скорости и давления определяются из диагональной системы линейных уравнений.*
Ключевые слова*: моделирование, задача Стокса, квази-спектральные полиномы, приближения Фурье, полиномиальная аппроксимация.*

Annotation. *The method of quasi-spectral polynomial is applied to the constructing a polynomial approximation of solution of the boundary value problem for Stokes system of equations. The method is based on using Fourier series in the orthogonal quasi-spectral polynomials. The pressure is determined as the solution of the Poisson equation. The Fourier coefficients of the boundary condition for pressure we find from system of linear equations. The rest of coefficients for the velocity vector and the pressure are determined from diagonal system of linear equations.*
Keywords*: modelling, Stokes problem, Quasi-spectral polynomials, Fourier Approximations, Polynomial Approximation.*

Метод квазіспектральних поліномів відноситься до класу високоточних та ненасичених методів розв’язування задач математичної фізики, які розглядаються в класичних монографіях. Задачі для системи рівнянь Стокса виникають при математичному описанні повільних встановлених течій не стискуваної в’язкої рідини та стаціонарних деформованих станів пружних не стискаючих матеріалів.

Поява методу квазіспектральних поліномів – зумовлена розвитком апроксимаційного методу В. К. Дзядика в роботах автора [1–4]. Квазі-спектральні поліноми широко використовуються до розв’язування крайових задач для диференційних рівнянь, систем звичайних нелінійних рівнянь та інших задач [1–4]. В пропонованій статті застосовано раніше вивчені властивості квазіспектральних поліномів та відповідних рядів Фур’є до розв’язування крайової задачі для системи рівнянь Стокса.

Під рідиною ми розуміємо не тільки власне рідину, наприклад воду, але також і газ. Перша спроба опису руху рідини належить Нав’є (1827). Теперішню форму рівнянням опису руху рідини надав власне Стокс (1845). Рівняння, що описують рух рідини і насамперед турбулентний, називаються рівняннями Нав’є-Стокса. Повна система рівнянь Нав’є-Стокса є нелінійною і дуже затратною для машинного моделювання руху рідини.

Метою нашої роботи є ефективне машинне розв’язання лінеаризованої моделі рівнянь Нав’є-Стокса у вигляді так званої крайової задачі Стокса. Оскільки лінійну задачу Стокса передбачається розв’язувати на кожній ітерації для того, щоб розв’язати повну систему рівнянь Нав’є-Стокса, то велике значення мають вимоги до швидкості машинної моделі. Раніше нам вдалося реалізувати швидкий алгоритм розв’язування крайових задач для рівняння Пуассона, а також для довільних рівнянь еліптичного типу в паралелепіпеді.

В складних областях, склеєних з паралелепіпедів, які ми називаємо L-подібними областями, теж задачі такого типу зводять до швидкого і високоточного розв’язування в одному паралелепіпеді. Звичайно, машинні програми, які ґрунтуються на методі квазіспектральних поліномів працюють незрівняльно швидше, порівнюючи з класичними методами сіток та скінчених елементів. Спектральні методи на основі класичних ортогональних поліномів теж програють у швидкості методу квазіспектральних поліномів.

Розглянемо внутрішню задачу Стокса: два рівняння динаміки для вектора $z=(u,v)$ швидкості

$$\begin{aligned} &-\left(h_x^{\,2}u_{xx}+h_y^{\,2}u_{yy}\right)+h_x p_x = f(x,y), \\ &-\left(h_x^{\,2}v_{xx}+h_y^{\,2}v_{yy}\right)+h_y p_y = q(x,y), \quad -1<x,y<1, \end{aligned} \tag{1}$$

поверхнева потужність потоку ($g=0$ – умова нерозривності)

$$h_x u_x + h_y v_y = g\left(x,y\right), \quad -1 \le x,y \le 1, \tag{2}$$

на межі області $-1 \le x,y \le 1$ – крайові умови першого роду

$$u = \varphi\left(x,y\right), \quad v = \psi\left(x,y\right), \tag{3}$$

де h_x, h_y – деякі, додатні числа, $\varphi = \varphi\left(x,y\right)$, $\psi = \psi\left(x,y\right)$ – відомі функції. Будемо вважати, що крайові умови (3) узгоджені з рівнянням нерозривності в усіх кутових точках $\left(\pm1,\pm1\right)$ квадрата $-1 \le x,y \le 1$. Припустимо, що задача (1)–(3) має єдиний розв'язок u,v,p при умові, що $p\left(-1,-1\right) = p_0$, де p_0 – деяке число.

Квазіспектральні поліноми першого та другого родів $K_i^{\circ}\left(x\right), K_i^{\square}\left(x\right)$ задовольняють квазіспектральні диференційні та інтегральні рівняння та мають ряд інших цікавих властивостей [2–4].

Задачу Стокса будемо розв'язувати методом Фур'є за системою квазіспектральних поліномів. З цією метою функціям u,v,p поставимо у відповідність скінчені ряди Фур'є за квазіспектральними поліномами

$$\begin{gathered}
u^n = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=1}^{2n+2} u_{i,j}^{\square\circ} K_i^{\square}\left(x\right) K_j^{\circ}\left(y\right), u_{i,j}^{\square\circ} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u K_i^{\square}\left(x\right) K_j^{\circ}\left(y\right) dxdy, \\
v^n = \sum_{i=1}^{2n+2} \sum_{j=0}^{2n} v_{i,j}^{\circ\square} K_i^{\circ}\left(x\right) K_j^{\square}\left(y\right), v_{i,j}^{\circ\square} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u K_i^{\circ}\left(x\right) K_j^{\square}\left(y\right) dxdy, \\
p^n = \sum_{i=1}^{2n+2} \sum_{j=1}^{2n+2} p_{i,j}^{\circ\circ} K_i^{\circ}\left(x\right) K_j^{\circ}\left(y\right), p_{i,j}^{\circ\circ} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u K_i^{\circ}\left(x\right) K_j^{\circ}\left(y\right) dxdy.
\end{gathered} \tag{4}$$

В подальшому опускатимемо індекс n, оскільки будемо вважати його фіксованим і звичайно однаковим для всіх формул. Тут вважається, що n не менше двох. Випадок $n = 1$ розглядається простіше ніж даний, але його ми опускаємо.

Між коефіцієнтами Фур'є функцій та їх похідних існує простий зв'язок для кожної із систем квазіспектральних поліномів. Вкажемо деякі найважливіші з них для функцій однієї змінної:

$$u^{\circ}_{xx,i}=-\lambda_i u^{\circ}_i+d^i_{\circ}\Delta^i u,\quad i=1,...,2n, \tag{5}$$

$$u^{\square}_{xx,i}=-\lambda_i u^{\square}_i+d^i_{\square}\Delta^i u_x,\quad i=0,...,2n, \tag{6}$$

$$u^{\circ}_{x,i}=-\mu_i u^{\square}_i,\ \mu_i=\sqrt{\lambda_i},\quad i=1,...,2n, \tag{7}$$

$$u^{\square}_{x,i}=\mu_i u^{\circ}_i+d^i_{\square}\Delta^i u,\quad i=0,...,2n, \tag{8}$$

де $\Delta^i u=u(1)-(-1)^i u(-1)$ для довільної функції $u=u(x)$, $\lambda_i>0, d^i_{\circ}$ – наперед відомі параметри диференціювання.

Числа $\Delta^i_x u^{\circ}_j$, які є очевидним чином узагальненням чисел $\Delta^i u$, обчислюються із крайових умов (3):

$$u^{\square\circ}_{i,N-j'}=(\kappa_{i'})^{-1}\left(\Delta^{j'}_y u\right)^{\square\circ}_i,\ \left(\Delta^{j'}_y u\right)^{\square}_i=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Delta^{j'}_y u K^{\square}_i(x)\,dx, \tag{9}$$
$$i=0,...2n,\ j'=0,1,$$

де $N=2n+2$. Аналогічно обчислюються крайові коефіцієнти $\Delta^j_y v^{\circ}_i$.

Внутрішні коефіцієнти Фур'є поліномів (4), знаходитимемо із алгебраїчних рівнянь, які нижче побудуємо. Прямо із крайових умов типу (9) знаходяться $(8n+4)$ крайових коефіцієнтів Фур'є.

Лема 1. Формули (5),(7),(8) справджуються для будь-яких поліномів однієї змінної степені $\le 2n+1$, а формула (6) для поліномів степені $\le 2n$.

Дискретизація рівнянь динаміки. *Перейдемо до коефіцієнтів Фур'є в рівняннях динаміки (1) і дістанемо*

$$\begin{aligned}&-\left(h_x^{\,2}\left[u_{xx}\right]^{\square\circ}_{i,j}+h_y^{\,2}\left[u_{yy}\right]^{\square\circ}_{i,j,k}\right)+h_x\left[p_x\right]^{\square\circ}_{i,j}=f^{\square\circ}_{i,j}, i=0,...,2n,\ j=1,...,2n,\\&-\left(h_x^{\,2}\left[v_{xx}\right]^{\circ\square}_{i,j}+h_y^{\,2}\left[v_{yy}\right]^{\circ\square}_{i,j}\right)+h_y\left[p_y\right]^{\circ\square}_{i,j}=q^{\circ\square}_{i,j}, j=0,...,2n, i=1,...,2n,\end{aligned} \tag{10}$$

Виконуючи тут диференціювання в коефіцієнтах Фур'є за формулами (5)–(8)

$$-\left(-\lambda^x_i u^{\square\circ}_{i,j}+d^i_{\square x}\Delta^i_x u^{\circ}_{x,j}\right)-\left(-\lambda^y_j u^{\square\circ}_{i,j}+d^j_{\circ y}\Delta^j_y u^{\square}_i\right)-$$
$$\left(\mu^x_i p^{\circ\circ}_{i,j}+d^i_{\circ x}\Delta^i_x p^{\circ}_j\right)=f^{\square\circ}_{i,j},$$
$$-\left(-\lambda^x_i v^{\circ\square}_{i,j}+d^i_{\circ x}\Delta^i_x v^{\square}_j\right)-\left(-\lambda^y_j v^{\circ\square}_{i,j}+d^j_{\square y}\Delta^j_y v^{\circ}_{y,i}\right)+$$
$$+\left(\mu^y_j p^{\circ\circ}_{i,j}+d^j_{\circ y}\Delta^j_y p^{\circ}_i\right)=q^{\circ\square}_{i,j},$$

де $$\lambda_i^x = {h_x}^2 \lambda_i,\ \mu_i^x = h_x \mu_i,\ d^i_{\square x} = {h_x}^2 d^i_{\square},\ d^i_{\circ x} = {h_x}^2 d^i_{\circ}.$$

Залишимо зліва знаку рівності члени з невідомими коефіцієнтами Фур'є:

$$\begin{aligned} &\left(\lambda_i^x + \lambda_j^y\right) u^{\square\circ}_{i,j} + \left(\mu_i^x p^{\circ\circ}_{i,j} + d^i_{\square x} \Delta^i_x p^{\circ}_j\right) = F^{\square\circ}_{i,j}, i = 0,\dots,2n;\ j = 1,\dots,2n; \\ &\left(\lambda_i^x + \lambda_j^y\right) v^{\circ\square}_{i,j} + \left(\mu_j^y p^{\circ\circ}_{i,j} + d^j_{\square y} \Delta^j_y p^{\circ}_i\right) = Q^{\circ\square}_{i,j},\ j = 0,\dots,2n; i = 1,\dots,2n. \end{aligned} \tag{11}$$

де

$$\begin{aligned} F^{\square\circ}_{i,j} &= f^{\square\circ}_{i,j} + \left(d^i_{\square x} \Delta^i_x u^{\circ}_{x,j} + d^j_{\circ y} \Delta^j_y u^{\square}_i\right), \\ Q^{\circ\square}_{i,j} &= q^{\circ\square}_{i,j} + \left(d^i_{\circ x} \Delta^i_x v^{\square}_j + d^j_{\square y} \Delta^j_y v^{\circ}_{y,i}\right), \end{aligned} \tag{12}$$

Коефіцієнти Фур'є $\Delta^j_y u^{\square}_i, \Delta^i_x v^{\square}_j$ і т.д. будемо називати крайовими першого роду, бо вони прямо знаходяться із крайових умов першого роду для функцій u, v, при цьому використовуються значення при $x = \pm 1$, або $y = \pm 1$.

Крайові коефіцієнти Фур'є $\Delta^i_x u^{\circ}_{x,j}$, $\Delta^j_y v^{\circ}_{y,i}$ будемо називати крайовими другого роду, бо вони тісно пов'язані із крайовими умовами другого роду, тобто нормальними похідними для u при $x = \pm 1$, нормальними похідними для v при $y = \pm 1$. Згадані нормальні похідні знаходяться з рівняння нерозривності (потужності потоку) (2) та крайових умов першого роду (3). Відповідь напишемо для крайових коефіцієнтів Фур'є другого роду функцій u, v:

$$\begin{aligned} h_x \Delta^i_x u^{\circ}_{x,j} + h_y \Delta^i_x v^{\circ}_{y,j} &= \Delta^i_x g^{\circ}_j, \\ h_x \Delta^j_y u^{\circ}_{x,i} + h_y \Delta^j_y v^{\circ}_{y,i} &= \Delta^j_y g^{\circ}_i, \end{aligned} \tag{13}$$

або

$$\begin{aligned} h_x \Delta^i_x u^{\circ}_{x,j} - h_y \mu^y_j \Delta^i_x v^{\square}_j &= \Delta^i_x g^{\circ}_j, \\ -h_x \mu^x_i \Delta^j_y u^{\square}_i + h_y \Delta^j_y v^{\circ}_{y,i} &= \Delta^j_y g^{\circ}_i. \end{aligned} \tag{14}$$

У формули (14) увійшли відомі крайові коефіцієнти першого роду для u, v при $x = \pm 1, y = \pm 1$. Тому, для обчислення коефіцієнтів Фур'є (12) потрібно використовувати крайові значення двох функцій u, v на сторонах квадрата $-1 \le x, y \le 1$.

Припустимо, що нам вдалося обчислити коефіцієнти Фур'є функції тиску $p = p(x,y)$. Тоді, коефіцієнти Фур'є компонент швидкості u,v знайдемо за формулами

$$
\begin{aligned}
u_{i,j}^{\circ\circ} &= \frac{-\mu_i^x p_{i,j}^{\circ\circ} - d_{\circ x}^i \Delta_x^i p_j^{\circ} + F_{i,j}^{\circ\circ}}{\lambda_i^x + \lambda_j^y}, i = 0,\dots,2n;\ j = 1,\dots,2n, \\
v_{i,j}^{\circ\circ} &= \frac{-\mu_j^y p_{i,j}^{\circ\circ} - d_{\circ y}^j \Delta_y^j p_i^{\circ} + Q_{i,j}^{\circ\circ}}{\lambda_i^x + \lambda_j^y}, j = 0,\dots,2n, i = 1,\dots,2n.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Далі перейдемо до обчислення коефіцієнтів Фур'є функції тиску, що як бачимо дозволить знайти коефіцієнти Фур'є трьох функцій, які є компонентами швидкості. Тоді рівняння тиску

$$
h_x{}^2 p_{xx} + h_y{}^2 p_{yy} = G, \tag{16}
$$

де

$$
G = h_x f_x + h_y q_y + \left(h_x{}^2 g_{xx} + h_y{}^2 g_{yy} \right),
$$

випливає із рівнянь (1), (2).

Для першої крайової задачі, тобто задачі Діріхле, зручно працювати з коефіцієнтами Фур'є за системою квазіспектральних поліномів першого роду $K_i^{\circ}(x)$, причому коефіцієнти Фур'є можна поділити на дві великі групи. З однієї сторони це коефіцієнти для подання крайових умов (крайові коефіцієнти), а з іншої сторони це коефіцієнти, які відповідають поданню розв'язку у внутрішній частині області і таким чином пов'язані з таким явищем, як необхідність задовольнити рівняння Пуассона у внутрішніх точках області.

Перейдемо до коефіцієнтів Фур'є першого роду по обох змінних в рівнянні (16) для функції тиску. Виконаємо диференціювання в спектральному просторі коефіцієнтів Фур'є і дістанемо алгебраїчні рівняння

$$
-\left(\lambda_i^x + \lambda_j^y\right) p_{i,j}^{\circ\circ} + d_{\circ x}^i \Delta_x^i p_j^{\circ} + d_{\circ y}^j \Delta_y^j p_i^{\circ} = G_{i,j}^{\circ\circ}, \quad i,j = 1,\dots,2n, \tag{17}
$$

де

$$
\begin{aligned}
G_{i,j}^{\circ\circ} = -\mu_i^x f_{i,j}^{\circ\circ} - \mu_j^y q_{i,j}^{\circ\circ} - \left(\lambda_i^x + \lambda_j^y\right) g_{i,j}^{\circ\circ} + \\
d_{\circ x}^i \Delta_x^i g_j^{\circ} + d_{\circ y}^j \Delta_y^j g_i^{\circ}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Зазначимо, що внутрішні коефіцієнти Фур'є $p_{i,j}^{\circ\circ}$, загальним числом $(2n)^2$ та крайові коефіцієнти Фур'є $\Delta_x^i p_j^{\circ}, \Delta_y^j p_i^{\circ}$, або їм пропорційні

$$p^{\circ\circ}_{N-i',2j-j'} = \kappa_i \Delta_x^i p_j^{\circ},$$
$$p^{\circ\circ}_{2i-i',N-j'} = \kappa_j \Delta_y^j p_i^{\circ},$$

які ми теж називаємо крайовими, загальним числом $4(2n)$ (приймаючи до уваги, що квадрат має 4 сторони) є невідомими у внутрішній задачі Стокса, як зрештою як і всі інші коефіцієнти Фур'є.

Нарешті до крайових коефіцієнтів Фур'є ми відносимо

$$p^{\circ\circ}_{N-i',N-j'} = \kappa_{i'}\kappa_{j'}\Delta^{i'}\Delta^{j'} p, \quad i', j' = 0,1, \tag{19}$$

які ми називатимемо кутовими коефіцієнтами Фур'є. Їх кількість, звісно, дорівнює 4 за числом вершин квадрата.

З наведеного дослідження можна зробити висновок, що автором розроблено та поширено новий, економний, швидкий та високоточний метод квазіспектральних поліномів, на випадок наближеного розв'язування внутрішньої крайової задачі Стокса в прямокутнику. Проведені розрахунки для конкретних задач Стокса показують, що характер поведінки похибок схожий до того, який спостерігався у випадку задачі Діріхле для рівняння Пуассона. Найбільші обчислювальні затрати стосуються розв'язування чотирьох систем лінійних алгебраїчних рівнянь розміром $2n \times 2n$ для обчислення крайових коефіцієнтів Фур'є функції тиску p, а всі інші коефіцієнти Фур'є знаходяться шляхом послідовного використання формул (17), (15) для прямих обчислень. Для заданого n розв'язок задачі Стокса подається через $m = 3(2n+1)^2$ коефіцієнтів Фур'є. Застосування методів типу Гальоркіна з базисом у вигляді класичних ортогональних поліномів вимагало б розв'язання системи лінійних рівнянь із щільною матрицею такої ж розмірності m.

1. Янчук П. С. Использование А-метода при решении эллиптических и параболических уравнений / П. С.Янчук // Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов. – Киев, 1989. – С. 112–121. **2**. Янчук П. С. Про оцінки похибок поліноміальної апроксимації розв'язку задачі Неймана для рівняння Пуассона / П. С. Янчук // Волинський математичний вісник. – 2012. – Вип. 9(18). – С. 189–207. **3**. Янчук П.С. Про спектральний метод наближеного розв'язування рівняння Пуассона / П.С.Янчук // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.,2012. С. 261–268. **4**. Янчук П. С. Поліноміальна апроксимація розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона з неоднорідними крайовими умовами / П. С. Янчук //Волинський математичний вісник. – 2011. – Вип. 8(17). – С. 213–239.

Рецензент: д.ф.-м.н., професор Джунь Й. В.