**Янчук П.С., к.ф.-м.н., професор** (Міжнародний економіко-гуманітарний університет, м. Рівне)

# 3D КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВІЛЬНИХ ТЕЧІЙ НЕСТИСКУВАНОЇ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ МЕТОДОМ КВАЗІСПЕКТРАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ

Апарат квазі-спектральних поліномів може широко викоритовуватися до розв'язування крайових задач для диференційних рівнянь, систем звчайних нелінійних рівнянь та інших задач [1-6]. В пропонованій роботі застосовано раніше вивчені автором властивості квазіспектральних поліномів та рядів Фур'є до розв'язування внутрішньої крайової задачі для системи рівнянь Стокса, яка є основою математичного описання повільних течій нестискуваної в'язкої рідини.

Запропонований метод [1-6] відноситься до класу високоточних та ненасичених методів розв'язування задач математичної фізики.

*Постановка внутрішньої задачі Стокса.* Розглянемо внутрішню задачу Стокса: три рівняння динаміки для вектора $z=(u,v,w)$ швидкості

$$\begin{aligned}
&-\left(h_x{}^2u_{xx}+h_y{}^2u_{yy}+h_z{}^2u_{zz}\right)+h_z p_x = f(x,y,z),\\
&-\left(h_x{}^2v_{xx}+h_y{}^2v_{yy}+h_z{}^2v_{zz}\right)+h_z p_y = q(x,y,z),\\
&-\left(h_x{}^2w_{xx}+h_y{}^2wv_{yy}+h_z{}^2w_{zz}\right)+h_z p_z = r(x,y,z),\\
&-1<x,y,z<1,
\end{aligned} \tag{1}$$

поверхнева потужність потоку ( $g=0$ - умова нерозривності)

$$h_x u_x + h_y v_y + h_z v_z = g(x,y,z), \quad -1\le x,y,z\le 1, \tag{2}$$

на межі області $-1\le x,y,z\le 1$ — крайові умови першого роду

$$u=\varphi(x,y,z), \quad v=\psi(x,y,z), \qquad w=\zeta(x,y,z) \tag{3}$$

де $h_x, h_y, h_z$ — деякі, додатні числа,

$\varphi=\varphi(x,y,z), \quad \psi=\psi(x,y,z), \quad \zeta(x,y,z)$ — відомі функції.

Будемо вважати, що крайові умови **Error! Reference source not found.** узгоджені з рівнянням нерозривності в усіх кутових точках $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ квадрата $-1 \le x, y, z \le 1$. Припустимо, що задача
**Error! Reference source not found.-Error! Reference source not found.** має єдиний розв’язок $u, v, w, p$ при умові, що

$$p(-1,-1,-1) = c,$$

де $c$ — деяке число.
*Квазіспектральні поліноми першого та другого роду*. Внутрішні квазіспектральні поліноми першого роду $K_i^{\circ}(x)$ задовольняють псевдо-спектральні рівності, які мають вигляд [5]

$$\frac{d^2}{dx^2} K_i^{\circ}(x) = -\lambda_i K_i^{\circ}(x) + \tau_i^{\circ} K_{2n+2-i'}^{\circ}(x), \quad i = 1, \dots, 2n, \; i' = i \bmod 2.$$

Крайові квазіспектральні поліноми першого роду дорівнюють [5]

$$K_{2n+2}^{\circ}(x) = \frac{d}{dx} \bar{P}_{2n+2}(x), \quad K_{2n+1}^{\circ}(x) = \frac{d}{dx} \bar{P}_{2n+1}(x),$$

де $\bar{P}_{2n+1}(x), \bar{P}_{2n+2}(x)$ - поліноми Лежандра.

При цьому квазіспектральні поліноми $K_i^{\circ}(x), \quad i = 0, \dots, 2n+2$ утворюють ортонормоване сімейство функцій, тобто

$$\int_{-1}^{1} K_i^{\circ}(x) K_j^{\circ}(x) dx = \begin{cases} 0, & i \ne j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

та задовольняють умови $K_i^{\circ}(-x) = (-1)^{i+1} K_i^{\circ}(x)$.

Квазіспектральними поліномами другого роду називаються поліноми

$$K_0^{\square} = 1/\sqrt{2},$$

$$K_i^{\square}(x) = \left(1/\sqrt{\lambda_i}\right) \frac{d}{dx} K_i^{\circ}(x), \quad i = 1, \dots, 2n,$$

$$K_{2n+1}^{\square}(x) = P_{2n+1}(x), \quad K_{2n+2}^{\square}(x) = P_{2n+2}(x),$$

де $P_m(x)$ ортонормований поліном Лежандра, тобто $\left\| P_m(x) \right\| = 1$.

При цьому квазіспектральні поліноми $K_i^{\square}\left(x\right), \quad i=0,...,2n+2$ утворюють ортонормоване сімейство функцій і зокрема, квазіспектральні поліноми другого роду задовольняють умови ортогональності вигляду

$$\int_{-1}^{1} K_i^{\square}\left(x\right)dx=0, \quad i=1,\ldots,2n\,.$$

Квазіспектральні поліноми другого роду для парних індексів – парні, а для непарних - непарні. Парність квазіспектарльних поліномів першого роду протилежна парності їх індексів.

*Подання функцій* $u, v, w, p$ *квазіспектральними рядами Фур'є.* Функції $u$ поставимо у відповідність скінчений ряд Фур'є за квазіспектральними поліномами другого роду по першій змінній та квазі-спектральними поліномами першого роду по інших змінних

$$\begin{gathered} u^n=\sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=1}^{2n+2}\sum_{k=1}^{2n+2}u_{i,j,k}^{\square\circ\circ}K_i^{\square}\left(x\right)K_j^{\circ}\left(y\right)K_k^{\circ}\left(z\right), \\ u_{i,j,k}^{\square\circ\circ}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}uK_i^{\square}\left(x\right)K_j^{\circ}\left(y\right)K_k^{\circ}\left(z\right)dxdydz, \end{gathered} \tag{1}$$

В аналогічні ряди Фур'є розвинемо функції $v, w$. Функції $p$ поставимо у відповідність скінчений ряд Фур'є за квазіспектральними поліномами першого роду.

Нехай $\mathrm{M}^{p,q,r}$ означає множину всіх поліномів з дійсними коефіцієнтами вигляду

$$z=\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}\sum_{k=0}^{r}c_{ijk}x^iy^jz^k\ .$$

Звісно поліном $u^n$ (1) дає найкраще середньоквадратичне наближення для функції $u$ в $\mathrm{M}^{2n,2n+1,2n+1}$, тобто

$$\left\|u-u^n\right\|=\inf_{z\in\mathrm{M}^{2n,2n+1,2n+1}}\left\|u-z\right\|,$$

де $$\|u\|^2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u^2(x,y,z)\,dxdydz$$
і аналогічно для інших функцій.

В подальшому опускатимемо індекс $n$, оскільки будемо вважати його фіксованим і однаковим для всіх формул. Тут вважається, що $n$ не менше двох. Випадок $n=1$ розглядається простіше ніж даний, але його ми опускаємо.

*Висновки.* Поширено новий, економний, швидкий та високоточний метод [1-6] для випадку наближеного розв'язування внутрішньої крайової задачі Стокса в прямокутнику, що дозволяє створити ефективну комп'ютерну модель повільних течій нестискуваної в'зкої рідини, застосовуючи квазі-спектральні поліноми. Проведені розрахунки для конкретних задач Стокса показують, що характер поведінки похибок схожий до того, який спостерігався у випадку задачі Діріхле для рівняння Пуассона [4]. Найбільші обчислювальні затрати стосуються розв'язування восьми систем лінійних алгебраїчних рівнянь (всього $12n^2$ рівнянь кожна) для обчислення крайових коефіцієнтів Фур'є функції тиску $p$, а всі інші коефіцієнти Фур'є знаходяться шляхом послідовного використання простих формул для прямих обчислень. Всього знайдемо $m = 4(2n+1)^3$ невідомих коефіцієнтів Фур'є. Застосування класичних ортогональних поліномів вимагало б розв'язання системи лінійних рівнянь із щільною матрицею такої ж розмірності $m$. Побудований метод належить до високоточних ненасичених методів. Цей метод нескладно поширити на випадок внутрішньої крайової задачі Стокса в паралелепіпеді, тобто на тривимірний просторовий випадок.

**1.** Янчук П. С. Использование А-метода при решении эллиптических и параболических уравнений / П. С. Янчук // Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов. – Киев,1989. – С.112-121. **2.** Янчук П. С. Квазіспектральні многочлени та крайові задачі / П. С. Янчук // Волинський математичний вісник. – 1999. –Вип. 6. – С.183-187. **3.** Янчук П. С. Метод многочленних рядів Фур'є для задачі Діріхле для рівняння Пуассона в квадраті $[-1,1]\times[-1,1]$ / П. С. Янчук // Волинський математичний вісник. – 2000. – Вип. 7. – С.193-208. **4.** Янчук П. С. Поліноміальна апроксимація розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона з неоднорідними крайовими умовами / П. С. Янчук //Волинський математичний вісник. – 2011. – Вип. 8 (17). – С.213-239. **5.** Янчук П. С. Про оцінки похибок поліноміальної апроксимації розв'язку задачі Неймана для рівняння Пуассона /П.С.Янчук // Волинський математичний вісник. – 2012. – Вип. 9(18). – С.189-207. **6.** Янчук П. С. Про спектральний метод наближеного розв'язування рівняння Пуассона / П. С. Янчук // Питання прикладної математики і математичного моделювання. –Д., 2012. – С.261-268.