УДК 330.42:528.11:519.281

Джунь Й. В., проф., д.ф.-м.н., (Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем'янчука)

ПРО ДВІ СТРАТЕГІЇ ДІАГНОСТИКИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ В ЕКОНОМІЦІ НА ОСНОВІ СТАТИСТИЧНОГО АНАЛІЗУ РОЗПОДІЛІВ ЗАЛИШКОВИХ ПОХИБОК

Анотація. *В статті розглянуті два методи діагностики математичних моделей в економічних дослідженнях на основі статистичного аналізу залишкових похибок О-С (Observation- Calculation). Перший метод рекомендовано застосовувати при обсягах вибірок n в межах $30<n<500$, використовуючи χ^2-тест для перевірки нормальності значень О-С. Другий - рекомендовано для діагностики похибок О-С у випадку, коли їх обсяг $n>500$, оскільки такі вибірки, за висновком відомого кембриджського професора Г. Джеффріса, як правило, підкоряються розподілу Пірсона VII типу, який має додатній ексцес. При обсягах значень О-С $n>500$ математична модель вважається адекватною, якщо ексцес для О-С знаходиться в межах 6,0-1,2 при незначимій асиметрії. Допустимою вважається модель, якщо ексцес для О-С є в межах 1,2-0,0. Модель вважається неадекватною (недопустимою), якщо похибки О-С мають значимий відємний ексцес, чи значиму асиметрію.*

Ключові слова: *Діагностика математичних моделей, аналіз залишкових помилок, закон Гаусса, PJVII-розподіл.*

Аннотация. *В статье рассмотрены два метода диагностики математических моделей в экономических исследованиях на основе статистического анализа остаточных погрешностей О-С (Observation-Calculation). Первый из методов рекомендовано применять при объемах выборок n в пределах $30 <n <500$, используя χ^2-тест для проверки нормальности значений О-С. Второй - рекомендуется для диагностики ошибок О-С в случае, когда их объем $n> 500$, поскольку такие выборки, по заключению известного кембриджского профессора Г. Джеффриса, как правило, подчиняются распределению Пирсона VII типа, который имеет положительный эксцесс. При объемах значений О-С $n > 500$ математическая модель считается адекватной, если эксцесс для О-С*

находится в пределах 6,0-1,2 при незначимой асимметрии. Допустимой считается модель, если эксцесс для О-С находится в пределах 1,2-0,0. Модель считается неадекватной (недопустимой), если погрешности О-С имеют значимый отрицательный эксцесс, или значимую асимметрию.
Ключевые слова: *Диагностика математических моделей, анализ остаточных ошибок, закон Гаусса, PJVII-распределение.*

Annotation. *Two diagnistic methods of mathematical models in economic studies that are basedon the statistical analysis of residual errors O-S (Observation-Calculation) are considered in the article. The first method is recommended for sample sizes n within 30 <n <500, using the x-test to verify the normality of the O-C values. The second method is recommended for the diagnosis of O-C errors withthe volume n> 500. The famous Cambridge professor H. Jeffreys made the conclusion that such samples usually follow the Pearson distribution of type VII, which has a positive kurtosis. The mathematical model for volumes of O-C values n > 500 is considered adequateif the kurtosis for O-C is in the limits of 6,0-1,2 with insignificant asymmetries. The model is acceptable if the kurtosis for O-C is in the limits of 1,2-0,0. The model is considered inadequate (unacceptable) if the errors of O-C have a significant negative kurtosisor significant asymmetry.*
Key words:*Diagnosis of mathematical models, analysis of residual errors, Gauss' law, PJVII-distribution.*

Про важливість вивчення генерального розподілу залишкових похибок при діагностиці створеної дослідником математичної моделі явища чи процесу, писав ще один із засновників математичної статистики К. Пірсон у роботі [PearsonK., 1902]. Як відомо, залишкові похибки (O-C)(Observation-Calculation) - це різниці між значеннями показника y_i, які моделюються, і значеннями того ж показника Y_i, які обчисленні по математичній моделі, тобто:

$$(O\text{-}C)_i = x_i = y_i - Y_i \qquad (1)$$

При цьому неважливо, яким саме способом отримана модель - методом регресійного аналізу, спектрального чи будь-яким іншим методом. Важливо, щоб математична модель належним чином враховувала усі істотні фактори, які впливають на досліджуваний процес. В цьому разі залишкові похибки x_iмають характер випадкових незалежних величин, у яких вже нема ніякої іншої корисної для дослідника інформації. Згідно з концепцією видатного німецького математика К.Ф.Гауса, випадкові, незалежні похибки, у яких відсутні систематичні похибки, мають підкорятися нормальному закону розподілу, щільність імовірності якого є такою:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \qquad (2)$$

де σ^2- дисперсія випадкових похибок.

Таким чином,Гаус сформував першу ймовірнісну концепцію ідеальних випадкових, незалежних похибок. Якщо дійсно залишкові похибки x_i підкоряються розподілу (2), то це значить, що вся корисна інформація про досліджуваний процес, всі фактори, які на нього впливають, враховані математичною моделлю явища і в цьому разі похибки x_i можна віднести до шумового поля, із якого вже неможливо отримати якусь корисну для дослідника інформацію.

В тому разі, коли похибки x_i істотно відрізняються від закону Гауса, можна говорити про те, що математична модель не враховує якісь суттєві фактори, які впливають на досліджуваний процес. Ціневраховані фактори будуть мати характер систематичних похибок в x_i.Такі систематичні впливи будуть порушувати випадковий характер залишкових похибок і спотворювати модель (2). Ці спотворення будуть мати характер істотних відхилень емпіричних розподілів значень x_i від закону Гауса.Істотність цих відхилень можна оцінити методами теорії перевірки гіпотез, наприклад, за допомогою χ^2 - критерію Пірсона.Цей критерій дає ймовірності того, що значення x_i, отримані по даній моделі, є вибіркою із нормальної генеральної сукупності. Якщо ця ймовірність мала, то це буде означати також і незначну досконалість нашої моделі. В якості критичного значення χ^2 -тесту можна прийняти його звичний 5% рівень.

Якщо

$$\chi^2 \geq \chi^2_{0,05}\ , \qquad (3)$$

то це буде свідчити про неприйнятність (некоректність) математичної моделі.

При
$$\chi^2 < \chi^2_{0,05} \qquad (4)$$

можна вважати, що застосована нами математична модель є адекватною.

При цьому, позначенню χ^2-тесту краще визначати фактичну імовірність гіпотези нормальності.Нерівність (4) означає, що ймовірність гіпотези нормальності не може бути меншою 5%.

Зауважимо, що вивчення відхилень емпіричних розподілів похибок від закону Гауса, давно вже стало необхідним елементом не лише діагностики математичних моделей,але і теорії точності виробництва і контролю за роботою автоматизованих станків і агрегатів.Якщо, наприклад, станок випускає деталь, неминучі похибки виготовлення якої підкоряються закону Гауса, то це свідчить про гарне налаштування станка і стабільність його роботи.Якщо розподіл похибок виготовлення деталей нагадує розподіл Пірсона VIIтипу,- то це свідчить, що ріжучий елемент станка затупився і його необхідно замінити. Якщо ж розподіл похибок виготовлення деталі стає асиметричним чи плосковершинним, то це свідчить про розладку всієї системи станка і він негайно виключається. Реалізації таких підходів, які започатковані російським академіком А. М. Колмогоровим і його школою, давно вже лежить в основі стратегії, яка забезпечує метрологічну грамотність процесу вимірів і шляхи підвищення їх точності.Аналогічний підхід можна застосувати і в математичному моделюванні.Якщо введення в математичну модель нового раніше не враховано фактора наближає розподіл значеньО-С до нормального закону, то це значить що стратегія її вдосконалення вибрана правильно, якщо ні - то дослідник помилився з вибором причини чи фактора, який зумовлює неадекватність моделі.На протязі довгого часу, зразу після появи роботи [GaussK.F., 1809],експериментатори і теоретики, кожен по-своєму, були впевнені в справедливості закону похибок Гауса.Відоме класичне зауваження Ліппмана з цього приводу, яке цитує Пуанкаре:«експериментатори думають про закон похибок як про математичну теорему, математики вважають, що це експериментальний факт» [див. також CramerH., 1946; StiglerS.M., 1975].Статистичний досвід показує, що в дійсності часто розподіли похибок x_i є приблизно гаусовими.Але виникає цілком слушне питання - саме коли нормальний закон спостерігається часто?На це питання дав належну відповідь відомий кембриджський професор Г. Джеффріс у роботі [JeffreysH., 1940]. Впідрозділі5.7 цієї роботи, він стверджує, що при обсягах похибок n> 500, як правило, закон Гауса є цілком адекватним, оскільки при таких обсягах x_i важко доказати їх відхилення від цього закону.

В роботі [DzhunI., 2015] була визначена нижня межа для мінімального обсягу вибірки при моделюванні, яка забезпечує його статистичну значущість: n>30.Тобто, при обсягах вибірок x_i

$$30<n<500 \tag{5}$$

при діагностиці економічних моделей можна використовувати саме закон Гауса в якості ідеальної, бажаної форми розподілу.

Проте, зовсім інша картина спостерігається якщо обсяг значень x_i, $n > 500$. В своєму видатному і дуже цікавому дослідженні Джеффріс [JeffreysH., 1939] проаналізував 9 великих вибірок.Із них 6 рядів обсягом приблизно 500спостережень взятих з роботи[PeaksonK., 1902] і 2 ряди багатократних спостережень у Грінвічі, з обсягами 4540 і 4810[JeffreysH., 1939].Джеффріс виявив, що 7 із 9розподілів похибок мають довгі «хвости», а один є близьким до нормального і з короткими «хвостами», але останній мав істотну серіальну кореляцію похибок. Він зробив висновок, що при великих вибірках x_i їх близькість до нормальності не є причиною для заспокоєння, а є привідом для серйозних підозр відносно не виключених систематичних похибок.

Ретельно дослідивши усі рядиДжеффріс прийшов до висновку, що для великих вибірок x_i обсягомn>500, необхідно застосовувати зовсім іншу модель абсолютного імовірнісного хаосу для похибок x_i, а саме таку:

$$y = c\left[\, 1 + \frac{0,5}{M}\left(\frac{x-\lambda}{\sigma}\right)^2 \right]^{-m}, \tag{6}$$

де $c = [\sqrt{2(m-0{,}5)} * \sigma * \mathrm{B}\left(m+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)]^{-1}$; $\mathrm{B}(z,w)$ – бета функція; $m = (m-0{,}5)^2 m^{-2}$

Розподіл (6) створив Джеффріс використовуючи класичну криву Пірсона VII типу. Але він і розподіл (6) знову таки назвав кривою ПірсонаVII типу. Проте, загальновідома класична крива Пірсона VII типу близька, але не зовсім ідентична розподілу (6).Класичну криву Пірсона VII типуДжеффріс перебудував для потреб теорії похибок так, щоб форма (6) мала, як і закон Гауса, діагональну інформаційну матрицю, оскільки відомо, що незалежність оцінок математичного сподівання і дисперсії має місце лише для нормальної генеральної сукупності [GenryR.S., 1936; LukacsE.A., 1942]. Такої властивості класична крива Пірсона VII типу немає. Тому, щоб уникнути плутанини криву (6)слушно назвали розподіломПірсона-Джеффріса VII типу(скорочено*PJVII*-розподілом).

Фактично форма (6) є узагальненням розподілів Гауса і Стьюдента: при$m = -\infty$(6) є розподілом Гауса, при $m < \infty$- (6) є *t*-розподілом для дискретних значень ступенів свободи.

$$v = 2m - /. \qquad (7)$$

В[JeffreysH., 1939] Джеффріс прийшов до висновку: якщо при $n > 500$ похибки x_i є ідеально випадковими, незалежними, тобто,у значеннях x_i нема ніякої іншої інформації (впливом неприємних систематичних впливів можна знехтувати), тоді параметр форми (6) має бути в межах

$$3<m<5$$

Як бачимо, ці межі є досить далекими від $m = \infty$,яке відповідає закону Гауса.

П. Хьюбер (усне повідомлення) [HampeF.R., RonchettiE.M., RousseuwP.I., StahelW.A., 1985, п.1.26] пересунув ліву границю в (8) до $m = 2$, що цілком є допустимим для випадкових, незалежних похибок x_i з флуктуацією їх дисперсії [DzhunI., 2012].

Головним є те, щоб розподіл x_i не мав значеньm>5, оскільки така ситуація свідчить про спотворення математичної моделі систематичними похибками, обумовленими її недосконалістю. Так як для закону Гауса $m=\infty$,, то це означає, що нормальність похибок при обсягах вибірок$n>500$є приводом для серйозних підозр щодо якості чи адекватності використаної нами математичної моделі.

Необхідно також підкреслити, що концепції як Гауса, так і Джеффріса, відносно форми закону розподілу x_i, є цілком слушними в рамках парадоксуЕльсберга-Хампеля[DzhunI., 2011] . Згідно цього парадоксу будь-яка неперервна гіпотеза щодо форми розподілу реальних похибок буде відкинута з ростом обсягу числа значень x_i .

Важливість вивчення форми розподілу похибок, тим більше для великих вибірок вже давно підкреслювали у своїх працях видатні математики-статистики[NewcombsS/., 1886; PearsonK., 1902; Student, 1927]. Проте, лише тільки Джеффріс чітко визначив мету і конкретний напрямок стратегії вдосконалення моделей для дослідників, які бажають мати адекватні теорії,що спираються на метрологічно досконалі показники і виміри.Значення m в (6) визначається методоммаксимальної правдоподібності, тому не завжди його можна оперативно обчислити.Оскільки mзалежить від ексцесу розподілу похибокx_iто межі (8) відповідають таким ексцесам $\mathcal{E}$:

$$6 \geq \mathcal{E} \geq 1{,}2 \tag{9}$$

<u>Підсумковий висновок</u>. При обсягах значень О-С в межах $30 < n < 500$ адекватність математичної моделі можна контролювати за допомогою χ^2 – критерію Пірсона: при $\chi^2 \geq \chi^2_{0,05}$ модель можна вважати неадекватною, при $\chi^2 < \chi^2_{0,05}$ адекватною.

При обсягах значень $x_i n > 500$ математична модель з ексцесом залишкових похибок, який попадає в межі (9) є не лише адекватною але і досконалою.Проте біля 30% найбільш досконалих експериментів попадають в межі (9) по ексцесу[DzhunI., 2015].Це значить, що створення досконало адекватних математичних моделей є процесом, який вимагає наполегливої цілеспрямованої роботи. Але бажано, щоб будь-яка математична модель попадала, принаймні, в зону допустимої адекватності по ексцесу похибок x_i:

$$1{,}2 > \mathcal{E} \geq 0 \qquad (10)$$

Це означає, що математичні моделі, які мають значимий від'ємний ексцес або істотну асиметрією випадкових похибок x_i, є неприйнятними.

• Cramer H. (1946) Mathematical Methods of Statistics. University Press. Princeton
• Dzhun' I. V. (2011) Method for Diagnostics of Mathematical Models in Theoretical Astronomy and Astrometry. Kinematics and Physics of Celestial Bodies, vol.27, No.5, pp : 260-264, Allerton Press, Inc.
• Dzhun' I.V. (2012) What are Differences "Observation-Calculation" bound to be During Modern Experiments in Astrometry/ Kinematiscs and Physics of Celestial Bodies, vol.28, №1, pp : 70-78, Allerton Press, Inc.
• Dzhun' I.V. (2015) Neklasichskaya teoriya pogreshnostey izmereniy [Non-classical Error Theory in Measurement] Rivne, Estero Publ. – 168 p.
• Gauss C.F. (1809) Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium. Hamburgi.
• Geary R.C. (1936) Distribution of Student's ratio for non-normal samples. Journal of the Royal Statistical Society, Suppl.3.
• Hampel F.R., Ronchetti E.M., Rousseeuw P.J.,Stahel W.A. (1985)Robust Statistics. The Approach Based on Influence Functions. John Wiley & Sons.
• Jeffreys H. (1939) The Law of Errors in the Greenwich Variation of Latitude Observations. Mon. Not. of the RAS, vol.99, №9, pp : 703-709
• Jeffreys H. (1940)Theory of Probability. Sec. Eddition.- Oxford. -468p.
• Lukacs E.A. (1942)A characterization of the normal distribution, Annals of Mathematical Statistics, vol.13, №91.
• Newcomb S. (1886) Generalized Theory of the Combination of Observations so as to obtain the best Result. Amer. J. Math №1/14, p: 1-249.
• Pearson K. (1902)On the Mathematikal Theory of Errors of Judgment with special Reference to the personal Equation.// Philosophical Transactions of the Royal Sosiety of London. Ser. A., vol.198, p : 253-296.

• Stigler S.M. (1975)Contribution to the discussion of the meeting of robust statistics. – In: Proceedings of the 40th Session of the ISI, Warsaw. –Bull. Int Statist. Inst., v.XLVI, book 1, p. 383-384.
• Student (1927)Errors of routine analysis. –Biometrika, v.19, pp.-151-164.