УДК 528.1:519.281

Й. В. Джунь
Міжнародний економіко-гуманітарний університет
ім. акад. С. Дем'янчука

ПРО МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ АДАПТОВАНИЙ ДО ЗАКОНУ ПОХИБОК ПІРСОНА-ДЖЕФФРІСА

Класичний метод найменших квадратів (МНК) К. Ф. Гаус розробив ґрунтуючись на припущенні, що похибки спостережень підкоряються закону e^{-h^2} [4]. Трохи більше ніж через 100 років Г. Джеффріс, ретельно проаналізувавши результати відомого експерименту К. Пірсона [23], прийшов до висновку про практичну і теоретичну неспроможність закону Гауса за умови, якщо число спостережень n>500. В роботах [18-29] він показав, що випадкові похибки великих обсягів при сталій метрологічній ситуації підкоряються такому симетричному закону розподілу ймовірностей:

$$f(x)=\frac{\Gamma(m+1)}{\sqrt{2\pi(m-0{,}5)}\Gamma(m+0{,}5)}\cdot\frac{1}{\sigma}\left[1+\frac{0{,}5m^2}{(m-0{,}5)^3}\left(\frac{x-\lambda}{\sigma}\right)^2\right]^{-m} \quad (1)$$

з показниками степені m в межах

$$5\geq m\geq 3, \quad (2)$$

що відповідає таким значенням для ексцесів:

$$1{,}2\leq \varepsilon \leq 6 \quad (3)$$

В (1) – λ, σ, m – параметри розподілу; $\Gamma(m)$ – гама-функція. Джеффріс вперше звертає увагу на діагностичну роль форми розподілу похибок. Він робить висновок, що якість експерименту, виконаних за сталих умов спостережень, не викликає сумніву, якщо ексцес потрапляє в межі (3).

Розподіл Джеффріс отримав використовуючи класичну криву Пірсона VII типу, яка має недіагональну інформаційну матрицю. Цю класичну криву, після деяких перетворень, він привів до форми (1), яка має, як і закон Гауса, незалежні параметри. Будучи дуже скромною людиною Джеффріс не дав особливої назви розподілу (1) який він створив і продовжував називати його розподілом Пірсона VII типу. Тому деякі дослідники ідентифікують класичний розподіл Пірсона VII типу і навіть узагальнений розподіл, який по історичному непорозумінню пов'язують з іменем Коші а не Пуассона як належало б, з джеффрісовою формою (1), хоча цього робити не можна. Враховуючи сказане, розподіл (1) ми будемо називати, щоб уникнути плутанини, законом похибок Пірсона-Джеффріса, чи просто законом Пірсона-Джеффріса.

Виникає питання, чому Джеффріс, та інші математики [11] наполягають на дотриманні умови (3). Іншими словами необхідно з'ясувати, що ж відбувається, якщо похибки багатократних геодезичних вимірів не вкладаються в межі (3) для ексцесів, або, ще гірше, мають від'ємний ексцес чи навіть істотну асиметрію? Спробуємо дати відповідь на це питання опираючись на фішерівську теорію оцінок. З цією метою все розмаїття можливих емпіричних розподілів похибок представимо чотирьохпараметричними сімействами оскільки за рахунок добору чотирьох параметрів можна досить точно підігнати той чи інший закон розподілу до будь-яких емпіричних даних [12]. З цією метою використаємо диференціальну форму чотирьохпараметричних сімейств Пірсона [1].

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x + c_1}{c_0 + c_1 x + c_2 x^2}\ , \tag{4}$$

де початком відліку є середнє , а величини c_0, c_1, c_2 залежать від асиметрії A і ексцесу ε похибок [1]:

$$c_0 = \frac{\sigma^2(4\varepsilon - 3A^2 + 12)}{2[5\varepsilon - 6(A^2 - 1)]}; \qquad c_1 = \frac{\sigma A\sqrt{\varepsilon + 6}}{2[5\varepsilon - 6(A^2 - 1)]};$$

$$c_2 = \frac{2\varepsilon - 3A^2}{2[5\varepsilon - 6(A^2 - 1)]}, \tag{5}$$

де $A=\mu_3\sigma^{-3}$; $\varepsilon=\beta_2-3$; $\beta_2=\mu_4\mu_2^{-2}$;

$m_r=\int\limits_{l_1}^{l_2} x^r f(x)dx$; $r=2,3,4$; $\mu_0=1$; $\mu_0=0$; l_1 и l_2 - області визначення щільності ймовірності *f(x).* (6)

Оцінка параметру розміщення *a* щільності *f(x)* на осі *x* при негаусових похибках знаходиться за допомогою функції максимальної правдоподібності *L*, яка в даному випадку отримана для *n* спостережень y_i із щільністю розподілу похибок *f(x):*

$$L=\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i\right), \tag{7}$$

де $f(x_i)$ – ордината щільності ймовірності в точці

$$x_i=y_i-a \tag{8}$$

Прологарифмувавши (7) і припускаючи, що *L* залежить тільки від *a,* знаходимо часткову похідну

$$-\frac{\partial lnL}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n}\frac{f'(x_i)}{f(x)}=0. \tag{9}$$

Щоб отримати оцінку параметра *a* помножимо чисельник і знаменник формули (9) на y_i - *a* і вирішимо це рівняння відносно *a:*

$$a=\frac{\sum y_i\cdot p\left(x_i\right)}{\sum p\left(x_i\right)} \tag{10}$$

В (10) значення вагової функції $p(x_1)$ є наступним:

$$p(x_i) = \frac{f'(x_i)}{x_i f(x_i)} \tag{11}$$

Вагову функцію (11) вперше отримали королівські астрономи Х. Р. Хюльме і Л. С. Т. Сімс в 1939 р. [17]. Проте вони не запропонували формули для обчислення ваг $p(x_1)$.

Для того, щоб знайти аналітичний вираз для обчислення ваг (11) підставимо (4) у формулу (11). В результаті ми отримуємо таку формулу вагової функції сімейств Пірсона:

$$p(x) = \frac{x + c_1}{x\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right)} = \frac{1}{c_0 + c_1 x + c_2 x^2} + \frac{c_1}{x\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right)} \tag{12}$$

Формула (12) визначає нескінченну множину вагових функцій, які залежать від значень c_0, c_1, c_2 , тобто, від типу закону розподілу похибок. В (12) присутній також і дуже небезпечний член c_1, значення якого визначається асиметрією розподілу похибок. Член c_1 виникає якщо $A \neq 0$. За наявності асиметрії $c_1 \neq 0$, тоді при x=0 ми отримуємо по формулі (12) нескінченні ваги. Надефективні оцінки недопустимі з точки зору теорії оцінок та в комп’ютерних розрахунках. Таким чином, асиметрія розподілу похибок не є фактом, яким можна знехтувати. Вона свідчить про те, що ми виконуємо оцінювання в недопустимій області. Іншими словами, асиметрія розподілу похибок є загрозливим сигналом того, що проведений геодезичний експеримент знаходиться у вкрай небезпечній зоні, у якій неможливо отримати ефективні оцінки. Позначимо цю область через C_1. Водночас зазначимо, що ще Д. І. Менделєєв вважав нульову асиметрію похибок хорошим критерієм узгодженості вимірів і відсутності в них систематичних похибок [10].

Розглянемо тепер симетричні сімейства вагових функцій, які ми отримуємо при c_1 =0 в формулі (12):

$$p(x)=\frac{1}{c_0+c_2x^2}=\frac{5\varepsilon+6}{2\sigma^2\beta_2+\varepsilon x^2},\qquad (13)$$

де β_2 куртозис розподілу похибок.

Фрагмент поверхні вагової функції (13) для симетричних розподілів Пірсона показано на рис. [5]. Для закону Гауса: ε=0, β_2=3 вагова функція (13) є константою:

$$p(x)=\sigma^{-2}\qquad (14)$$

Пряма (14) на рис. поділяє поверхню симетричних вагових функцій на дві істотно різні частини:

В – область плосковершинних симетричних розподілів з ε<0, у якій вага похибки зростає із її збільшенням;

А – область закону похибок Пірсона-Джеффріса у якій вага похибки нескінченно зменшується з її зростанням.

Розглянемо область **В.** проблема полягає у наступному: чи можна оцінювати шукану величину по результатам спостережень, які мають плосковершинний розподіл? Якщо можна, то в цьому разі ми повинні погодитись з наступним метрологічним абсурдом – чим більша похибка тим більшою є її вага, що власне і демонструється на рис. поведінкою вагової функції в області **В.** Така ідея протирічить самій суті виміру, а це означає, що при ε<0 ми потрапляємо в неприємну зону недопустимих оцінок.

Розглянемо тепер область **А**, тобто область джеффрісових похибок з ексцесами $\varepsilon \geq 0$. Як бачимо з рис. – це найбільш сприятлива область: в ній *p(x)* є або сталою (це область класичного оцінювання), або *p(x)* необмежено зменшується при $x \to \infty$ (це область стійких оцінок).

Таким чином можна зробити такий важливий висновок: єдиною областю вагової функції, де можливе ефективне оцінювання, є область **А**, що відповідає закону Пірсона-Джеффріса. Проте Джеффріс ставить ще одну умову: незалежні похибки спостережень мусять мати ексцес в межах границь (3), тобто мати ексцес не менше ніж 1 – 2. Якщо ж дійсні похибки мають ексцес в межах

$$0 \leq \varepsilon \leq 1{,}2,\qquad (15)$$

то вони, хоч і знаходяться в допустимій області оцінювання, проте мають незначні систематичні похибки. Іншими словами якщо ексцес знаходиться в межах (15), то це свідчить про наявність в результатах спостережень малих невиключених систематичних похибок. Вплив останніх буде тим більшим чим ближче ε знаходиться до нуля в межах (15). Різні випадки композиції розподілів, які підтверджують такий висновок, розглянуті в роботі [2]. Таким чином, якщо число спостережень $n \geq 500$, то нормальність похибок спостережень – це причина для серйозного занепокоєння з приводу невиключених сталих похибок.

Для перевірки того, що отримані результати багатократних спостережень потрапляють в зону допустимого оцінювання **А** необхідно побудувати довірчі інтервали для незміщених оцінок асиметрії і ексцесу [8, с.386]:

$$A = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-2} \frac{m_3}{m_2^{-1.5}}; \tag{16}$$

$$\varepsilon = \frac{(n-1)(n^2-2n+3)}{n(n-2)(n-3)} \frac{m_4}{m_2^2} - \frac{3(n-1)(2n-3)}{n(n-2)(n-3)} - 3, \tag{17}$$

де m_r - вибіркові центральні моменти порядку r обчислені для похибок x_i

$$m_r = n^{-1} \sum (x_i - \bar{x})^r; \quad \bar{x} = n^{-1} \sum x_i \tag{18}$$

Для побудови довірчих інтервалів для A і ε можна скористаємось відомими стандартними похибками цих статистик [8, с.391]:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{4\mu_2^2\mu_6 - 12\mu_2\mu_3\mu_5 - 24\mu_2^3\mu_4 + 9\mu_3^2\mu_4 + 35\mu_2^2\mu_3^2 + 36\mu_2^5}{4\mu_2^5 n}} \tag{19}$$

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{\mu_2^2\mu_8 - 4\mu_2\mu_4\mu_6 - 8\mu_2^3\mu_3\mu_5 + 4\mu_4^3 - \mu_2^2\mu_4^2 + 16\mu_2\mu_3^2\mu_4 + 16\mu_2^3\mu_3^2}{\mu_2^6 n}}, \tag{20}$$

де m_r незміщені оцінки центральних моментів порядку *n*.

При $n \geq 500$ моменти m_r в (19) і (20) можна замінити вибірковими моментами (18), оскільки в цьому випадку зміщення оцінок σ_A і σ_ε є незначним. Наприклад для нормального закону, як це видно із (17), при *n*=500 вибірковий куртозис є наступним:

$$\frac{m_4}{m_2^2} = \frac{3n(n-2)(n-3)(n-1)^{-1} + 6n - 9}{n^2 - 2n + 3} = 2{,}999951$$

тобто, практично не відрізняється від незміщеного.

Для закону Гауса, незміщена оцінка асиметрії обчислюється за формулою (16), а ексцес отримують використовуючи такий вираз:

$$\varepsilon = \frac{n-1}{(n-2)(n-3)}\left[(n+1)\left(\frac{m^4}{m_2^2} - 3\right) + 6\right], \tag{21}$$

а значення дисперсій оцінок (16) і (21) з таких формул:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)}};$$

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{24n(n-1)^2}{(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)}} \tag{22}$$

Для симетричних розподілів з ексцесом біля +1, а таким найчастіше є реальні розподіли похибок, формули (19), (20), (22) дають практично ідентичні результати. Тому використовуючи оцінки (16), (21), (22), знаходимо 90% довірчі межі для *A* і ε:

$$A \pm 1{,}645\sigma_A;\ \varepsilon \pm 1{,}645\sigma_\varepsilon, \tag{23}$$

де квантиль $t_{10\%}$ = 1,645

Отримавши довірчі інтервали (23) можна без труднощів визначити в допустимій чи недопустимій областях оцінювання ми отримали свої результати.

Адаптацію МНК до закону похибок Пірсона-Джеффріса можна легко здійснити особливо не змінюючи звичних процедур класичного МНК і вносячи лише незначні зміни в його програмне забезпечення. Практично адаптаційна процедура може бути реалізована в три етапи.

Спочатку застосовують класичний МНК і обчислюють мінімізовані залишкові похибки x_i для кожного i – того рівняння похибок. Потім обчислюють асиметрію і ексцес для похибок x_i по формулам (16) і (21) і визначають стандартні похибки цих статистик по формулам (22) і будують 90% довірчі інтервали для A і ε по формулам (23). Якщо обидва довірчих інтервали для A і ε накривають нуль,, то обмежуються застосуванням класичного МНК. В цьому разі адаптуватись до узагальненого закону похибок Пірсона-Джеффріса немає ніякої необхідності.

Зауважимо, що у випадку, коли довірчий інтервал для A не накриває нуль, або інтервал для ε потрапляє у від'ємну зону для ексцесів, то це свідчить про некоректно проведений експеримент, оскільки оцінювання виконано в недопустимих областях.

Адаптацію МНК до закону похибок Пірсона-Джеффріса виконують лише при виконанні таких умов.

- довірчий інтервал для A накриває нуль;
- весь довірчий інтервал для ε знаходиться в додатній області. Похибки за таким умов задовільно апроксимуються розподілом Пірсона-Джеффріса, ефективні оцінки параметрів λ, σ, m якого знаходимо використовуючи функцію максимальної правдоподібності L із рішення такої системи рівнянь [5]:

$$-\frac{\partial lnL}{\partial\lambda} = \frac{m}{M\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} R_i^{-1}(x_i - \lambda) = 0\,; \tag{24}$$

$$-\frac{\partial lnL}{\partial \sigma}=\frac{n}{\sigma}-\frac{m}{M\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}R_i^{-1}(x_i-\lambda)^2=0; \qquad (25)$$

$$-\frac{\partial lnL}{\partial m}=n\cdot\psi_0-\sum_{i=1}^{n}\ln R_i+\sum_{i=1}^{n}M_1\cdot R_i^{-1}\left(\frac{x_i-\lambda}{\sigma}\right)^2=0, \qquad (26)$$

де $R=1+(x-a)^2\cdot\sigma^{-2}\cdot 0{,}5\cdot M^{-1}; M=(m-0{,}5)^3 m^{-2}$;

$M_1=0{,}5m^2(m+1)(m-0{,}5)^{-4}$;

$\psi_0=\psi(m+1)-\psi(m+0{,}5)-[2(m-0{,}5)]^{-1}$; $\psi(m)$ – псі-функція.

Система (24-26) вирішується методом наближень. В першому наближенні приймають: $\lambda=\sum\upsilon_i/n;\ \sigma^2=0{,}933\mu_2;\ m=4$.

Розв'язавши рівняння (24-26) і отримавши ефективні оцінки параметрів σ і m знаходимо по формулі (11) ваги похибок $p(x_i)$ для закону Пірсона-Джеффріса, припускаючи як і Гаус, що в спостереженнях відсутні систематичні похибки:

$$p(x_i)=\frac{f'(x_i)}{x_i f(x_i)}=\left[\left(\frac{m-0{,}5}{m}\right)^3\sigma^2+\frac{x_i^{\ 2}}{2m}\right]^{-1} \qquad (27)$$

Із (27) легко бачити, що для закону Гауса (m=∞) $p(x_i)=\sigma^{-2}$

Третій етап: кожне рівняння похибок x: нормують, помноживши його на значення $\sqrt{p(x_i)}$, обчислене по функції (27) і отримують оцінки МНК – шуканих поправок l_j, за умови $\sum x^2_i\ p(x_i)$ = min:

$$l_j=D_{l_j}/D, \qquad (28)$$

де D – детермінант системи нормальних рівнянь; D_{l_i} - визначник відповідної невідомої. Дисперсії поправок l_j знаходимо з формул:

$$\sigma_{l_j}^2 = \sigma_0^2 \frac{A_{jj}}{D}; \;\; \sigma_0^2 = \frac{\sum x^2 p(x)}{n-k}, \qquad (29)$$

де A_{jj} - мінори діагональних елементів системи нормальних рівнянь. В менш відповідальних випадках $p(x_i)$ можна отримати набагато простіше без вирішення системи (24-26), використовуючи вагову функцію (13).

Ми розглянули МНК, адаптований до розподілу похибок Пірсона-Джеффріса за допомогою вагової функції. В різкій опозиції з нашим висновком знаходиться теорема Гауса-Маркова, яка доводить, що оцінки МНК мають мінімальну дисперсію серед усіх лінійних оцінок незалежно від того яким є закон розподілу похибок. З самого початку ця теорема викликала у дослідників досить обережне відношення, оскільки її висновки були протилежними рекомендації Лежандра про те, що перш ніж застосовувати МНК необхідно ретельно переглянути усі спостереження і вилучити ті з них, які не вкладаються в ложе закону Гауса. Найбільш досвідчені геодезисти-практики були впевнені в правильності рекомендацій саме Лежандра, так як прекрасно розуміли, що не можна як завгодно засмічувати вибірку і вважати при цьому, що МНК-оцінки і надалі зберігають оптимальні властивості. Дисонанс у звучанні висновків згаданої теореми з рекомендацією Лежандра обумовлений наступним. А. А. Марков, доводячи теорему зробив досить непевне і навдивовиж абстрактне припущення про те, що обернена дисперсія не може характеризувати вагу оцінки незалежно від того є чи не є нормальними похибки. Абсурдність цього припущення демонструє формула (14) з якої видно, що обернена дисперсія може характеризувати вагу тільки в нормально розподілених похибок, тобто, коли $\varepsilon=0$ і $A=0$. Обернена дисперсія не може характеризувати вагу спостережень якщо вони не є гаусовими. Якщо $\varepsilon \neq 0$, $A \neq 0$ то як можна бачити з формули (12), обернена дисперсія взагалі нічого не характеризує. В цьому разі повною і достатньою характеристикою системи негаусових спостережень може бути тільки їх вагова функція, що залежить від значень статистичних кумулянт A і ε й ні в якому разі не σ^{-2}.

Більше того, при $A<0$, чи $\varepsilon<0$ вагові функції взагалі стають сингулярними. Тоді про яку оптимальність МНК-оцінок може йти мова в цьому випадку, якщо не зважати на відхилення від нормальності і разом з тим ігнорувати згадані вище застереження Лежандра.

Негативний вплив теореми Гауса-Маркова на геодезистів був настільки великим, що вони, за рідкими виключенням, практично не реагували на праці таких видатних математиків-статистиків як С. Ньюкомб [21-22], К.

Пірсон [23], Стьюдент [24], Р. Фішер [16], Г. Джеффріс [20], К. Ф. Огородніков [9], Н. І. Ідельсон [6], Д. Тьюки [25], котрі в своїх роботах показували, що оптимальності оцінок неможливо досягнути без знання розподілу ймовірностей похибок спостережень. Непоміченими залишились роботи наукової школи академіка Е. П. Федорова у яких були запропоновані досконалі методи стійкого оцінювання і адаптовані до форми розподілу похибок сучасні схеми МНК [5, 13, 15].

Про те, що оптимальності оцінок не можна досягнути без врахування форми розподілу похибок свідчать нерівності Рао Крамера, інформаційні відношення Фішера.

Відмітимо, що зарубіжні математики розібрались з теоремою Гауса-Маркова ще в 1922 р. Свідченням цього є такий висновок в роботі відомих сучасних математиків [11, с.54]. «Заслуговує увагу ще один, який часто зустрічається у зв'язку з методом найменших квадратів «аргумент», що зовсім таким не є. Мова йде про теорему Гауса-Маркова, яка оголошує оцінки методом найменших квадратів оптимальними серед усіх лінійних навіть тоді, коли ніяких припущень про нормальність не робиться. Справа в тому, що як уже показав Фішер (1922) скрізь, за виключенням малого околу нормального закону, всі лінійні оцінки є жахливо поганими. Видалення різко відмінних спостережень не є лінійною операцією і лише тоді, коли таких спостережень немає, про методи найменших квадратів можна говорити як про методи, що володіють від помірної до повної доброякісності». Як бачимо Фішер ще в роботі [16] (і не сумніваючись в рекомендації Лежандра) іншим шляхом прийшов до тих же висновків, до яких прийшли ми в даному дослідженні.

Ввівши при доказі своєї теореми діагональну матрицю ваг у вигляді обернених дисперсій Марков тим самим постулював нормальність вихідних даних і не помітивши цього приходить до абсурдного висновку. Зауважимо, що небезпеку висновків подібного типу розумів ще Гаус [3], тому він всіляко уникав математичних абстракцій зосереджуючись на вирішенні конкретних задач. А. А. Марков, як і інші корифеї його доби, вірили в те, що математика відкриває деякі «вічні» закони: закон Гауса, закон великих чисел, тощо. М. Клайн в оксфордському виданні своєї книги [7] пише про те, як в наш час усвідомлена хибність подібних уявлень. Ця віра в неперехідні істини, які відкриваються за допомогою математики висловлена в доповіді А. А. Маркова на святкуванні (!) в 1913 р. 200-річчя закону великих чисел. П. Ю. Ельясберг в [14] показав, що цей закон діє лише при певних обсягах інформації – завжди є межа, після якої збільшення кількості спостережень не приводить до підвищення точності оцінок. Це означає також, що в майбутньому напевно вже не будуть святкувати ювілей цього закону. Доречно зауважити, що є дві ніколи не співпадаючі речі – це незбагненна реальність з однієї сторони, а з іншої –

наше уявлення про неї – це своєрідний, повний надій міф, який змінюється з часом і який ми конструюємо перш за все за допомогою математики. Та будь-яка теорія, яку ми так творимо, якою б досконалою вона б не була, існує лише для того, щоб потім постраждати від фактів. Ніяких вічних істин чи законів немає – є лише тимчасові і наближені моделі, які постійно вдосконалюються або відмирають з ростом інформації. Підводячи підсумок дослідження можна зробити наступні висновки:

1. Оцінки асиметрії і ексцесу, які обчислені для залишкових похибок в схемах МНК є найбільш важливими статистиками, за допомогою яких оцінюється вплив ненормальності. Вони грають вирішальну роль при обробці спостережень і діагностиці математичного моделювання, а також при врівноваженні сіток в геодезії, якщо число похибок $n>500$

2. Найбільш бажаними характеристиками дійсно незалежних похибок є границі (3) для ексцесів за умови, що довірчий інтервал для коефіцієнта асиметрії покриває нуль;

3. Допустимою з точки зору теорії оцінок можна вважати таку форму розподілу похибок коли довірчі границі для ексцесу знаходяться в середині інтервалу (15) чи накривають нуль за умови, що асиметрія також є нульовою. Практично це означає що дійсні розподіли похибок мають підкорятись закону Пірсона-Джеффріса. В усіх інших випадках, якщо число спостережень $n \geq 500$, геодезичний експеримент слід вважати некоректним оскільки оцінювання виконується в недопустимих областях.

4. Зауважимо, що запропонований метод може використовуватись для діагностики геодезичних експериментів високого наукового та технічного рівня. При виконанні масових виробничих спостережень розглянута нами рафінована діагностика форми залишкових похибок, можливо в більшості випадків не обов’язкова.

5. Із збільшенням числа спостережень залишкові похибки, як правило, будуть підкорятись закону Пірсона-Джеффріса і матимуть на порядок і навіть на більше відмінні ваги. Тому значення розглянуті нами адаптаційної процедури МНК буде зростати разом із збільшенням обсягів спостережень в сучасних геодезичних експериментах.

6. В теорії обробки геодезичних даних теорема Гауса-Маркова зіграла вкрай негативну роль, дезорієнтуючи дослідників неправильним висновком про оптимальність МНК-оцінок при будь-яких відхиленнях від нормальності. Ця теорема, яку вважали досягненням російської науки, насправді на багато років затримала розвиток в Україні адаптованих до закону похибок еволюційних схем МНК.

7. Не меншу шкоду принесла згадана теорема практиці математичної обробки даних в геодезії. Пам’ятаючи цю теорему ще з університету, геодезисти не приділяли належної уваги відхиленням від нормальності, а роботи дослідників, які розробляли адаптовані до закону розподілу

процедури, розглядались як дещо другорядне, як своєрідний курйоз, що протирічить «вічній істині» у вигляді тієї ж теореми Гауса-Маркова, теореми до якої знаменитий Гаус має відношення лише як винахідник МНК і ім'я якого додано в назву теореми лише заради того, щоб надати теоремі значущості і респектабельності.

Література:

1. Большев Л.Н. и Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики -М.: ВЦ АН СССР, 1968 – 476 с.
2. Бородачев Н. А. Основные вопросы теории точности производства. Под ред. А. Н. Колмогорова - М. – Л.: Изд. АН СССР, 1950 – 360 с.
3. Бюлер В. Гаусс. Биографическое исследование: Пер. с англ. А.Л. Тома. / Под ред. С.Г. Гиндикина. - М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит., 1989. -208 с.
4. Гаус К. Ф. Избранные геодезические сочинения. Том 1. Способ наименьших квадратов. Под ред. Г.В. Багратуни. Пер. лат. и нем. – М.: Изд. геодез. лит., 1957, - 234 с.
5. Джунь И. В. Математическая обработка астрономической и космической информации при негауссовых ошибках наблюдений. Автореферат дис. докт. физ.-мат. наук.- К.: ГАО АНУ. 1992 – 46 с.
6. Идельсон Н. И. Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений. – М.: Геодезиздат, 1947. – 359 с.
7. Клайн М. Математика. Утрата определенности: Пер. с англ. / Под ред., с предисл. и примеч, И. М., Яглома. – М.: Мир. 1984. – 434 с.
8. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
9. Огородников К. Ф. Метод обработки наблюдений введением средних весов с применением к статистическому изучению звездных движений. // Астрономический журнал, 1928, том 5, вып. 1, с.1-21.
10. Маликов М. В. Основы метрологии. – М.: Комитет по делам мер и измерительных приборов при СМ СССР, 1979. – 480 с.
11. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. Пер. с. англ. / Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В. М.: Мир, 1989 – 512 с.
12. Тутубалин В. Н. Теория вероятностей. Краткий курс и научно-методические замечания. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1972 – 230 с.
13. Харин А. С., Яцкив Я. С. Изучение ошибок наблюдений Голосеевского каталога звезд широтных программ. // Астрометрия и астрофизика. К., 1970, вып. 10, с. 34-43.
14. Эльясберг П.Е. Измерительная информация: сколько её нужно? Как обрабатывать. М.: Наука. 1983 – 208 с.
15. Яцкив Я. С., Молотай А. А. Об использовании оптимальных линейных оценок математического ожидания и стандартного отклонения при обработке результатов астрономических наблюдений. // Астрометрия и астрофизика, 1979, №37, с. 56-60.
16. Fisher R. A. On the mathematical foundation of theoretical statistics. – Philos. Trans Roy. Soc. London, 1922 Ser. A, v 222, P. 309-368.

17. Hulme H. R., Syms L. S. T. The law of errors and the combinations of observations // Mon. Notic. Roy. Astron . Soc. – 1939. – **99**, N 8. – P. 642-658.

18. Jeffreys H. The Law of Error and the combination of observations. // Phil. Trans. Roy. Soc. London, A. – 1937. – N 237. – P. 231 – 271/.

19. Jeffreys H. The Law of Error in the Greenwich Variation of Latitude Observations. // Mon. Notic. of the RAS, 1939, vol. **99**, № 9, p. 703-709.

20. Jeffreys H. Theory of Probabiliti. Sec. Edition. – Oxford, 1940. – 468 p.

21. Newcomb S. A. Generalized theory of the combination of observations so as to obtain the best result. // Amer. J. Math. – 1886. – N 1/14. – P. 343 – 366.

22. Newcomb S. A. Researches of the motion of the Moon. // Astron. Pap. Publ. US Naut. Office. – 1912. – 9. – P. 1 - 249.

23. Pearson K. On the mathematical theory of errors of judgment with special reference to the personal equations. // Phil. Trans. Roy. Soc. London A. – 1902. – **198**. – P. 235 – 296.

24. Student. Errors of routine analysis – Biometrica, 1927, v. 19, p. 151-164.

25. Tukey J. W. The future of data analysis. // Ann. Math. Stat., 1967, vol. 33, p. 1 – 67.

Анотація

Про метод найменших квадратів адаптований до закону похибок Пірсона-Джеффріса (Pearson-Jeffreys)

Наведено алгоритм адаптації методу найменших квадратів до закону похибок Пірсона-Джеффріса. Показано чому теорема Гауса-Маркова є неспроможною.

Аннотация

О методе наименьших квадратов адаптированном к закону ошибок Пирсона-Джеффриса

Приведен алгоритм адаптации метода наименьших квадратов к закону ошибок Пирсона-Джеффриса. Показано почему теорема Гаусса-Маркова есть не состоятельной.

Summary

I. V Dzhun. About the Method of the least Squares which adaptation to Pearson-Jeffreys Law of Errors.

Приватний вищий навчальний заклад “Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем’янчука”

The Higher Educational Esta
of property “International U
Humanities named

Адреса: Україна, 33000, м. Рівне,
вул. академіка Степана Дем’янчука, 4
тел./факс: (0362) 23-01-86
р/р 26001301587372 в Промінвестбанку
м. Рівне, МФО 333335, код ЗКПО 24171048

Addre
Academician Stepa

260013015
Rivne, MFO

E-mail: mail@regi.rovno.ua

№_____ від “____”___________2013 р.

Головному редактору журналу “Геодезія , картографія та аерофотознімання”

Направляємо на Ваш розгляд наукову статтю доктора фізико-математичних наук, професора Й.В. Джуня: “Про метод найменших квадратів адаптований до закону похибок Пірсона-Джеффріса” Стаття направляється для публікації вперше.

Ректор професор А.С. Дем’янчук

Затверджую

ректор проф. Дем’янчук А.С.

«___» ________________ 20__ р.

ЕКСПЕРТНЕ ЗАКЛЮЧЕННЯ

про можливість опублікування матеріалів у пресі та інших засобах масової інформації

Експертна комісія Міжнародного економіко-гуманітарного університету імені академіка Степана Дем’янчука розглянула статтю Й.В.Джуня “Чим є насправді вага спостереження в способі найменших квадратів?” на 10 сторінках і підтверджує, що в матеріалах не містяться відомості, заборонені до опублікування згідно «Зводу відомостей, що становлять державну таємницю» (Наказ Служби безпеки України №440 від 12 серпня 2005 р. із змінами, внесеними згідно з Наказами Служби безпеки : №53 (z0102-06) від 24.01.2006 р., №297 (z0546-06) від 24.04.2006 р., №680 (z1172-06) від 12.10.2006 р., №114 (z0157-07) від 15.02.2007 р.) та «Переліку конфіденційної інформації, що є власністю держави у галузі освіти і науки України» (Наказ Міністерства освіти і науки України №273 від 28 березня 2008 р.).

ВИСНОВОК: Розглянуті матеріали статті “ Про метод найменших квадратів адаптований до закону похибок Пірсона-Джеффріса” автора Й.В. Джуня можуть бути опубліковані у відкритій пресі.

Голова комісії

кандидат фізико-математичних наук,

проф. кафедри інформаційних

систем та обчислювальних методів Янчук П.С.