УДК 004.4'275

Шах Антон, ст. IV курсу факультету кібернетики; науковий керівник – к.пед.н., доцент Лотюк Ю. Г. (Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем'янчука, м. Рівне)

МОДЕЛЮВАННЯ ФРАКТАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ

Анотація. *В статті розглянуто методи побудови фрактальних поверхонь, співвідношення між фрактальними кривими і поверхнями. З використанням випадкових фрактальних поверхонь переносу, побудовано фрактальні прибережні ландшафти і берегові лінії. Розглянуто метод моделювання узагальненого Броунівського руху, як клас гаусовських процесів, де показниик Херста може приймати довільні значення від 0 до 0.5, що означає антиперсистентність процесу, тобто будь-яка тенденція намагається змінитися на протилежну .*
Ключові слова: *Моделювання ландшафтних поверхонь, Броунівський рух, фрактали.*

Аннотация. *В статье рассмотрены методы построения фрактальных поверхностей, соотношение между фрактальными кривыми и поверхностями. С использованием случайных фрактальных поверхностей переноса, построены фрактальные прибрежные ландшафты и береговые линии. Рассмотрен метод моделирования обобщенного броуновского движения, как класс гауссовских процессов, где показатель Хёрста может принимать произвольные значения от 0 до 0.5, что означает антиперсистентность процесса, то есть любая тенденция пытается измениться на противоположную .*
Ключевые слова: *Моделирование ландшафтных поверхностей, Броуновское движение, фракталы.*

Annotation. *In this article discusses methods for constructing fractal surfaces, the correlation between the fractal curves and surfaces. Defining and using random fractal surface transport, managed to build a fractal landscapes and coastal shorelines.. Considered in detail the method of modeling a generalized Brownian motion as a class gaussian processes where Hurst exponent can take any value from 0 to 0.5, meaning antypersystentnist process, that any attempts to change the trend reversed.*
Keywords: *Simulation of landscape surfaces, Brownian motion, fractals.*

Моделювання ландшафтних поверхонь – одне з найважливіших понять комп'ютерної трьохвимірної графіки. Побудовою ландшафтів розробники комп’ютерних ігор та дизайнери цікавляться завжди, адже передати реалізм поверхні не так вже і легко.

Перші приклади самоподібних множин з незвичайними властивостями з'явилися в XIX столітті в результаті вивчення безперервних недиференційованих функцій. Термін «фрактал» ввів Бенуа Мандельброт в 1975 році, а у 1977 році вийшла книга «Фрактальна геометрія природи» [1]. Особливу популярність фрактали здобули з розвитком комп'ютерних технологій, що дозволило ефектно візуалізувати ці структури [2].

Фрактали широко застосовуються в комп'ютерній графіці для побудови зображень природних об'єктів, таких як дерева, кущі, гірські ландшафти, поверхні морів тощо. Існує безліч програм, призначених для генерації фрактальних зображень [3]. Проте при кожному запуску цих програм ми отримуємо однакові фрактальні поверхні, що обмежує їх застосування у ігрових та картографічних додатках, тому у даній роботі для моделювання ландшафтних поверхонь використовується рівняння узагальненого броунівського руху, що дозволяє отримувати нові поверхні при кожному запуску програми**.**

Актуальність цієї роботи обумовлена сучасними проблемами моделювання трьохвимірних ландшафтів у комп’ютерній графіці. Тому створення сучасного ландшафту є актуальним та має велике практичне значення. Практичне значення статті полягає в тому, що дає змогу побудови ландшафтів у навчальних та комерційних цілях.

Open Directory Project – Відкритий Каталог, також відомий як багатомовний вільний каталог посилань на сайти Всесвітньої павутини, що належить AOL [4], наводить список з майже 20 програм генерації фракталів, проте жодна з них повною мірою не використовує рівняння узагальненого броунівського руху для моделювання фрактальних поверхонь.

Мета дослідження полягає у розробці програмного забезпечення для моделювання ландшафтних поверхонь з використанням рівняння узагальненого броунівського руху.

Об’єкт дослідження: графічні можливості мов програмування та використання фракталів для моделювання поверхонь.

Моделювання узагальненого броунівського руху.

Поняття узагальненого броунівського руху введено Мандельбротом [5] через узагальнення випадкової функції $X(t)$ шляхом заміни показника $H = 1/2$ у співвідношеннях:

$$x = \frac{X(t) - X(t_0)}{\sqrt{2Dt}\left(\frac{|t - t_0|}{t}\right)^H} \qquad (1)$$

та

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \tag{2}$$

На будь-яке дійсне число з інтервалу $0 < H < 1$ результат узагальнення позначається $B_H(t)$. Дійсно узагальненими є випадки, коли $H = 1/2$, а випадок $H = 1/2$ відповідає незалежним приростам і описує броунівський рух. В цьому випадку ми будемо використовувати позначення B(t) = B1/2(t).

Якщо у виразах (1) та (2) позначення координати точки $X(t)$ замінити на $B_H(t)$, то буде ясно, що узагальнений броунівський процес має нульовий середній приріст $\langle B_H(t) - B_H(t_0)\rangle = 0$, а дисперсія приросту $V(t - t_0)$ має вигляд:

$$V(t - t_0) = \langle [B_H(t) - B_H(t_0)]^2 \rangle = 2D\tau(|t - t_0/\tau|)^{2H} \sim |t - t_0|^{2H}$$

Отже, і для звичайного, і для узагальненого броунівського руху з часом дисперсія зростає. Важливо зрозуміти, що узагальнений броунівський рух має нескінченно великий час кореляції [6].

Що стосується часових рядів спостережень, то застосування методу Херста [1] до багатьох природний явищ виявляє, що вони характеризуються персистентністю на широкому інтервалі тимчасових масштабів, тобто, якщо показник Херста приймає значення у межах від 0 до 0,5, то ряд, який він описує є випадковим і у ньому не спостерігається тенденцій росту або спадання, що генерує *випадковий ландшафт.* Тому, для моделювання часових рядів, що описують подібні явища, корисно використовувати узагальнений броунівський рух.

Розіб'ємо кожен крок по цілочисельному у часі на n інтервалів і отримаємо наступний наближений вираз:

$$B_H(t) - B_H(t-1) = \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \sum_{i=n(t-M)}^{nt} K\left(t - \frac{1}{n}\right) n^{-\frac{1}{2\xi_i}} \tag{3}$$

Тут $\{\xi_i\}$ з $i = 1,2,\ldots,M,\ldots$ є набір гауссових випадкових чисел з одиничною дисперсією і нульовим середнім.

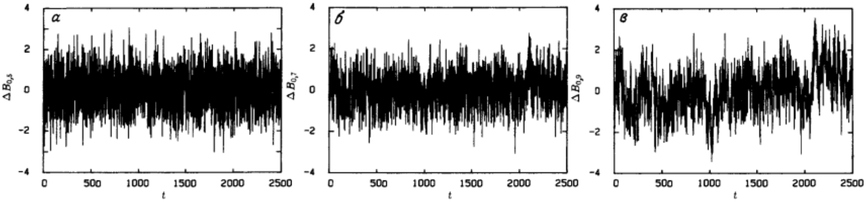

Рис. 1. Фрактальний шум, або приріст фрактальної броунівської функції B_H, розрахованої при M=700, та n=8, a – звичайний броунівський приріст при $H = 1/2$, $б$ – фрактальний проріст при $P = 0{,}7$; $в$ – фрактальний проріст при $H = 0{,}9$.

Змінивши індекс сумування і перегрупувавши члени в сумі, ми отримаємо такий вираз для дискретних збільшень при узагальненому броунівському русі:

$$B_H(t) - B_H(t-1) = \frac{n^{-H}}{\Gamma\left(\mathrm{H} + \frac{1}{2}\right)} \left\{ \sum_{i=1}^{nt} (i)^{H\frac{1}{2}} \xi_{(1+n(M+t)-i)} + \sum_{i=1}^{n(M-1)} \left((n+1)^{H-\frac{1}{2}} - (i)^{H-\frac{1}{2}} \right) \xi_{(1+n(M+t)-i)} \right\} \tag{4}$$

За послідовністю гауссових випадкових чисел можна скласти послідовність збільшень $B_н$. Зауважимо, що це наближення еквівалентне обчисленню ковзаючого середнього, зі степеневою ваговою функцією, від гауссового процесу.

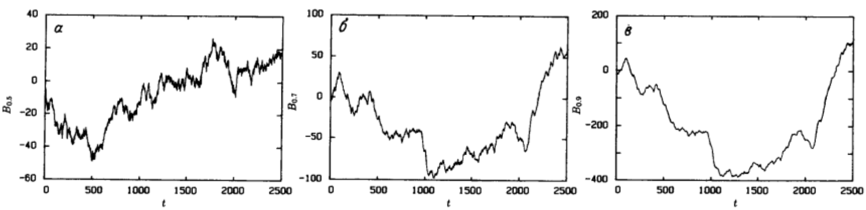

Рис. 2. Фрактальна броунівська функція B_H, розрахована при M=700, та n=8, a – звичайний броунівський приріст при $H = 1/2$, $б$ – фрактальний проріст при $P = 0{,}7$; $в$ – фрактальний приріст при $H = 0{,}9$.

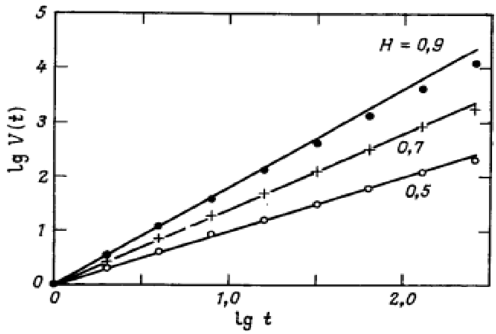

Рис. 3. Дисперсія приростів фрактальної броунівської функції B_H, розрахована при M=700, та n=8, a – звичайний броунівський приріст при $H = 1/2$, $б$ – фрактальний приріст при $P = 0{,}7$; $в$ – фрактальний проріст при $H = 0{,}9$.

Побудова фрактальних поверхонь.

Накладання нескінченного числа випадково орієнтованих нефрактальних поверхонь може привести до утворення фрактальної поверхні. На практиці зручніше накладати невелике число фрактальних поверхонь переносу, орієнтованих випадковим чином. Якщо, до того ж, похідні поверхні переносу випадкові, то можна отримати задовільний результат при невеликому обсязі обчислень. Дивлячись на будь який краєвид, ми охоплюємо поглядом лише обмежену область. Ця обставина визначає зовнішній просторовий масштаб $L_{макс}$. Крім того, присутній і мінімальний масштаб $L_{мін}$, який визначається роздільною здатністю нашого ока, а в нашому випадку – вибраної чисельної точності розрахунку координат x і y. Тому для побудови рельєфу використовуються синусоідальні поверхні перенесення.

Для кожної просторової частоти f ми маємо поверхню переноса виду

$$z(x,y) = C_f sin(fx) \tag{5}$$

з амплітудою C_f. Найменша істотна частота дорівнює $F_{мін} \sim 1/L_{макс}$, оскільки вплив менших частот зводиться до простого однорідного зсуву всієї поверхні по висоті. Найбільша істотна частота визначається здатністю $F_{макс} \sim 1/L_{мін}$, оскільки деталі меншого розміру побудувати не вдасться.

Для отримання висоти поверхні як функції координат використовують комплексне перетворення Фур'є:

$$Z(x) = \sum_j C_{f_j} \exp\left(2\pi i f_j x\right) \tag{6}$$

При обчисленні Z використовується звичайний алгоритм швидкого перетворення Фур'є. Добутий профіль поверхні має такі дійсну та уявну частини $z' = ReZ$ і $z'' = ImZ$. Нерегулярні флуктуації z' і z'' пов'язані з дискретністю частотного спектру, в якому присутні несумірні частоти.

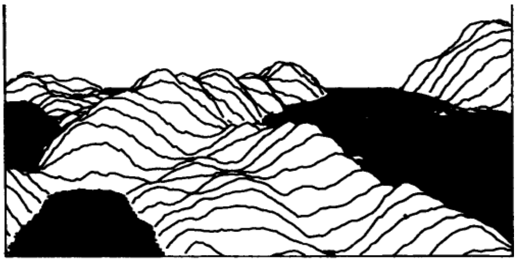

Рис. 4. Пейзаж з перспективою та кривизною. $a = 1{,}4$, $\beta = 1{,}1$.

У цій роботі поверхні будуються перенесенням, користуючись суперпозицією осцилюючих функцій.

Проведено аналітичний огляд методів побудови ландшафтних поверхонь. На основі аналізу спроектовано та розроблено програму генерації фрактальних ландшафтів та вибрано алгоритм броунівського руху.

У процесі проведеного дослідження в статті:

– розглянуто архітектуру програмного забезпечення;

– проаналізовано основні підходи до розробки програм даної структури;

– розроблено систему генерації ландшафту.

Отримані результати вказують на те, що моделювання фрактальних ландшафтів це не просто цікаво та красиво, але має велике практичне значення у професійній діяльності не тільки програмістів, а й дизайнерів.

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М. : «Институт компьютерных исследований», 2002. – 685 с. **2.** Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая / М. Шредер. – Ижевск : «РХД», 2001. **3.** Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Р. М. Кроновер. – М. : Постмаркет, 2000. – 352 с. **4.** Open Directory Project // Список генераторів фракталів http://www.dmoz.org/ Science/Math/Chaos_ and_Fractals/Software **5.** Федер Е. Фракталы / Е. Фредер. – М. : «Мир», 1991. – 261 с.

6. Кириллов А. А. Повесть о двух фракталах. – Летняя школа «Современная математика» / А. А. Кирилов. – Дубна, 2007. – 425 с.