УДК 519.62;519.63

СУМИ ФУР'Є ТА КВАЗІСПЕКТРАЛЬНІ ПОЛІНОМИ.

Янчук Петро Степанович,
к.ф.-м.н., доцент
Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. С. Дем'янчука
м. Рівне, Україна
janchukp@ukr.net

Вступ. В даній роботі будемо розглядати функціональні простори $L_2[-1,1]$ та $C[-1,1]$. Для функцій із класу $L_2 = L_2[-1,1]$ скалярний добуток і норма визначаються за допомогою формул

$$(u, v) = \int_{-1}^{1} uvdx\,, \|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

Більше важливим в обчислювальній практиці є наближення функцій у просторі $C[-1,1]$ з нормою

$$\|u\|_C = \|u\|_{C[-1,1]} = \max_{-1\le x\le 1}|u(x)|.$$

Основним поняттям наближення функцій $u = u(x)$ за допомогою алгебраїчних поліномів p, степінь яких $\deg(p)$ не перевищує m, є похибка найкращого рівномірного наближення

$$E_m(u)_C = \inf_{\deg(p)\le m}\|u - p\|_C.$$

Похибка найкращого середньоквадратичного наближення визначається аналогічно:

$$E_m(u) = E_m(u)_{L_2} = \inf_{\deg(p)\le m}\|u - p\|_{L_2}.$$

В просторі L_2найкраще наближення реалізують суми Фур'є-Лежандра. Суми Фур'є-Чебишова є популярними в обчислювальній математиці для наближення в рівномірній метриці. В даній роботі крім даних методів, розглядаються близькі до згаданих суми Фур'є, які виникають при апроксимації розв'язків крайових задач при використанні сімейства квазіспектральних поліномів.

Для функцій із простору $H^1 = H^1[-1,1]$ визначається скалярний добуток і норма

$$(u,v)_1 = \int_{-1}^{1}(DuDv + uv)dx\,, \|u\|_1 = \sqrt{(u,u)_1}.$$

Похибка найкращого наближення у гільбертовому просторі H^1 визначається аналогічно як і у просторі L_2.

Мета роботи. Дослідити поведінку сум Фур'є в рівномірній метриці, які виникають при наближеному розв'язуванні крайових задач та одержати відповідні асимптотичні оцінки наближення функцій із простору H^1.

Матеріали та методи. Квазіспектральні поліноми [1] можна згенерувати за допомогою двох класичних поліномів Лежандра P_{2n+1} та P_{2n+2}, степінь кожного з яких співпадає з відповідним індексом, вибраних в ролі базових.

При $i = 1, \dots, n$ для внутрішніх квазіспектральних поліномів справедливі рівності

$$D^2K^\circ_{2i}(x) = -\lambda^\circ_{2i}K^\circ_{2i}(x) + \tau^\circ_{2i}K^\circ_{2n+2}(x),$$
$$D^2K^\circ_{2i-1}(x) = -\lambda^\circ_{2i-1}K^\circ_{2i-1}(x) + \tau^\circ_{2i-1}K^\circ_{2n+1}(x), \quad (1)$$

де $\lambda^\circ_i, \tau^\circ_i$ параметри, які залежать тільки від n, причому $K^\circ_i(\pm1) = 0, i = 1,\dots,2n$.

Кожна з даних формул використовує по одному поліному, який називається крайовим:

$$K^\circ_{2n+2} = {\kappa_{2n+2}}^{-1}DP_{2n+2}, K^\circ_{2n+1} = {\kappa_{2n+1}}^{-1}DP_{2n+1},$$

перший з яких парний, а інший непарний, з L_2 −нормою, рівною одиниці.

Суму Фур'є-Лежандра заданої функції $u \in L_2[-1,1]$ ми зображуємо у вигляді

$$u^N = \sum_{i<N} u^\circ_i K^\circ_i(x).$$

У випадку класичних сум Фур'є-Лежандра (FL) їх коефіцієнти обчислюються за формулами

$$u^\circ_i = \int_{-1}^{1} u(x)K^\circ_i(x)dx\,, i = 1,\dots 2n + 2. \quad (2)$$

Внутрішні квазіспектральні поліноми перетворюються в нуль у точках ± 1, а тому крайові коефіцієнти Фур'є можемо знайти наближено з умов інтерполяції:

$$u^{\circ}_{2n+1} = \frac{u(1)+u(-1)}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}, u^{\circ}_{2n+2} = \frac{u(1)-u(-1)}{\sqrt{(2n+2)(2n+3)}}. \quad (3)$$

Модифіковану таким способом суму будемо називати модифікованою сумою Фур'є-Лежандра (FL1).

Нехай

$$\partial u^{N} = u^{\circ}_{2n+1} K^{\circ}_{2n+1}(x) + u^{\circ}_{2n+2} K^{\circ}_{2n+2}(x). \quad (4)$$

Внутрішні квазіспектральні поліноми є ортогональними у просторі Соболєва H^1, тому внутрішні коефіцієнти Фур'є функції $u \in H^1$ визначимо за формулами

$$u^{\circ}_{i} = \frac{\left(u-\partial u^{N}, K^{\circ}_{i}\right)_1}{\left(K^{\circ}_{i}, K^{\circ}_{i}\right)_1}. \quad (5)$$

Утворену таким способом суму, в якому крайові коефіцієнти знаходяться за формулами (3), а внутрішні за формулами (5), будемо називати $QS1$ сумою Фур'є.

Приклад 1. Визначимо функцію $u_0 = u_0(x), -1 \le x \le 1$ за допомогою формули

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1, x \ge 0. \end{cases}$$

Маємо суму Фур'є-Лежандра цієї функції

$$FL_{2n-1}(u_0, x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1}\left(P_{i-1}(0) - P_{i+1}(0)\right)P_i(x) =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(P_{2i-2}(0) - P_{2i}(0)\right)P_{2i-1}(x), P_{2i-1}(0) = 0, P_{2i}(0) = (-1)^{i}\frac{(2i-1)!!}{(2i)!!},$$

де $P_i = P_i(x)$–поліноми Лежандра, стандартизовані умовою $P_i(1) = 1$.

Приклад 2. Визначимо функцію $u_1 = u_1(x), -1 \le x \le 1$ за допомогою формули

$$u_1(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ x, x \ge 0. \end{cases}$$

Знайдемо для заданої функції u_1 модифіковану суму Фур'є-Лежандра та суму Фур'є-Чебишова:

$$FL1_{2n-1}(u_1,x)=\frac{P_1+P_0}{2}+\sum_{i=1}^{n}a_{2i-1}JP_{2i-1}(x),$$

$$JP_i=\frac{P_{i+1}-P_{i-1}}{2i+1},a_i=\frac{P_{i-1}(0)-P_{i+1}(0)}{2},$$

$$FC_{2n}(u_1,x)=\frac{1}{\pi}T_0(x)+T_1(x)/2-\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{4i^2-1}T_{2i}(x). \qquad (6)$$

Поліноми Лежандра задовольняють нерівності [2]

$$(1-x^2)|P_i(x)|\le\sqrt{\frac{2}{\pi i}},$$

,

і зокрема

$$|P_{2i}(0)|\le\frac{1}{\sqrt{\pi i}},a_{2i-1}\le\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(2i-1)}}.$$

Приймаючи до уваги нерівність

$$\frac{1}{(4i-1)\sqrt{(4i-3)(2i-1)}}<\frac{1}{16i(i-1)},$$

дістанемо

$$|u_1(x)-FL1_{2n+1}(u_1,x)|=\left|\sum_{i=n+1}^{\infty}a_{2i-1}JP_{2i-1}\right|<$$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{4\sqrt{2\pi}}{(4i-1)\sqrt{(4i-3)(2i-1)}}<\frac{\sqrt{2\pi}}{4n}. \qquad (7)$$

Суми Фур'є-Чебишова ми вибрали як у певному сенсі еталонні для апроксимації функцій у рівномірній метриці. Суми Фур'є-Чебишова

$$FC_N=\frac{c_0}{2}+\sum_{i=1}^{N-1}c_iT_i(x),c_i=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,T_i(x)=\cos\big(i\arccos(x)\big)$$

є аналогом сум Фур'є

$$S_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{n}(a_i\cos it+b_i\sin it),n=0,1,\ldots$$

Нехай $Lip[-1,1]$ – клас функцій $f=f(x)\in C[-1,1]$ таких, що при $\forall\, x_1,x_2\in[-1,1]$:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|.$$

Тоді відомо [3], що рівномірно відносно x виконується асимптотична рівність

$$\sup_{f \in Lip[-1,1]} |f(x) - f_N(x)| = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln(N)}{N} \sqrt{1 - x^2} + O(N^{-1}).$$

Оскільки функція $u_1 = u_1(x) \in H^1$, має більшу гладкість, ніж функції класу $Lip[-1,1]$, то і порядок похибки апроксимації матимемо кращий. Справді, приймаючи до уваги $|T_i(x)| \leq 1$, із (6) дістанемо

$$|u_1(x) - FC_{2n+2}(u_1, x)| \leq \frac{2}{\pi} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{4i^2 - 1} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n + 1/2}. \tag{8}$$

Довільну функцію $u \in H^1$ можна зобразити у вигляді

$$u = FL1_N(u, x) + \sum_{i=n+1}^{\infty} u'_i JP_i(x),$$

де

$$FL1_m(u, x) = \frac{u(1) + u(-1)}{2} + \frac{u(1) - u(-1)}{2} x + \sum_{i=1}^{n} u'_i JP_i(x) + R_n,$$

модифікована сума Фур'є-Лежандра. Оцінимо величину похибки наближення у рівномірній метриці $C[-1,1]$. Матимемо

$$|u(x) - FL1_m(u, x)|^2 = |\sum_{i=m+1}^{\infty} u'_i JP_i(x)|^2 \leq S_m {E_m}^2(Du),$$

де

$$E_m(u) = \sqrt{\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{2}{2i+1} |u_i|^2}, u_i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^{1} u(x) P_i(x) dx,$$

Оскільки

$$S_m = \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{2\pi^2}{(2i+1)(2i-2)} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2i(i-1)} = \frac{\pi^2}{2m},$$

то

$$|u(x) - FL1_m(u, x)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{2m}} E_m(Du), \tag{9}$$

$$E_m(u)_{C[-1,1]} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2m}} E_m(Du) \leq \frac{\pi}{\sqrt{2m}} E_m(u)_{H^1}. \tag{10}$$

Це і є бажана оцінка. Застосуємо її до оцінки рівномірного наближення функції $u_1 \in H^1$ з прикладу 1. Матимемо

$$E_m(Du_1) = \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2i-1)(4i-1)} \right\| = \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i(i-1)} \right\| \leq \frac{1}{2\pi m},$$

$$E_m(u_1)_{C[-1,1]} = \max_{-1\leq x\leq 1} |u(x) - FL1_m(u,x)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{2m}\sqrt{2\pi m}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2m}.$$

Ця оцінка корелює із оцінкою (7) для даної функції, яку ми знайшли раніше. Оцінка (10) узагальнюється на випадок функцій $u \in H^1[-1,1]^d, d > 1$:

$$E_m(u)_{C[-1,1]^d} \leq \frac{c}{\sqrt{m}} E_m(u)_{H^1[-1,1]^d}, \|u\|_{H^1[-1,1]^d} = \sqrt{\sum_{|i|\leq 1}(\partial_i u, \partial_i u)}. \quad (11)$$

Висновки. Порівнюючи оцінки (8) та оцінку (7), приходимо до висновку, що порядок наближення у рівномірній метриці є однаковим у випадку апроксимації сумами Фур'є-Чебишова та модифікованими сумами Фур'є-Лежандра функції u_1, причому цей приклад є типовим. Оцінка (10) та її узагальнення (11) рівномірного наближення довільної функції $u \in H^1$ є важливою, зважаючи на те, що оцінку величини $E_N(u)_{H^1}$ встановити значно простіше, ніж величини $E_N(u)_C$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ/BIBLIOGRAPHY:

[1] Janchuk P. S. (2000) The computing schemes for solving of nonlinear boundary value problem for the ordinary differential equations. Approximation theory and its applications. Kyiv: Institute of mathematics NAS of Ukraine, (31), 112 – 121.
[2] G. Szegö (1959) Orthogonal Polynomials, New York: Amer. Math. Soc.
[3] Dzyadyk, Vladislav & Shevchuk, Igor. (2008). Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials. Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials. 10.1515/9783110208245.