УДК 517.518.82: 517.518.36: 517.518.45 DOI 10.5072/zenodo.218467

Янчук П. С., к.ф.-м.н., професор (Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем'янчука, м. Рівне)

ШВИДКІ МАШИННІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ПОТОКУ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ В 3D ОБЛАСТІ

Анотація. *В статті презентовано метод квазіспектральних поліномів для рівнянь Нав'є-Стокса, який за своєю суттю є методом Фур'є за системами квазіспектральних поліномів першого та другого родів для відокремленого розрахунку поля швидкостей та тиску. Машинно розв'язано три рівняння динаміки, записані в примітивних координатах та одне рівняння нерозривності. Розрахунок проведено в тривимірному паралелепіпеді. Результати розрахунку перенесено на зв'язну область, яка є об'єднанням паралелепіпедів. Показано, що тиск визначається як розв'язок рівняння Пуассона, а коефіцієнти Фур'є граничної функції для тиску знаходяться з системи лінійних рівнянь.*
Ключові слова: *моделювання, рівняння Нав'є-Стокса, квазіспектральні поліноми, апроксимація Фур'є, апроксимація алгебраїчними поліномами.*

Аннотация. *В статье предложен квази-спектральный метод, который по своей сути является методом Фурье по системам квази-спектральных полиномов первого и второго родов для отдельного расчета поля скоростей и давления. Машинно решены три уравнения динамики, записанные в простых координатах и одно уравнение неразрывности. Расчет проведен в трехмерном параллелепипеде. Результаты расчета перенесены на связную область, которая является объединением параллелепипедов. Показано, что давление определяется как решение уравнения Пуассона, а коэффициенты Фурье граничной функции для давления находятся из системы линейных уравнений.*
Ключевые слова: *моделирование, уравнения Навье-Стокса, квази-спектральные полиномы, приближения Фурье, аппроксимация многочленами.*

Annotation. *In the article a quasi-spectral method, which in its essence is a Fourier method for systems of quasi-spectral polynomials of the first and second kinds for a separate calculation of the velocity and pressure fields is propose. Three equations of dynamics written in simple coordinates and one equation of continuity are computed. The calculation is carried out in a three-dimensional parallelepiped. The results are transferred to a connected domain, which is the union of parallelepipeds. It is shown that the pressure is defined as a solution of the Poisson equation, and the Fourier coefficients of the boundary function for pressure are found from a system of linear equations.*

***Key words**: modelling, Stokes problem, Quasi-spectral polynomials, Fourier Approximations, Polynomial Approximation.*

Метод квазіспектральних поліномів відноситься до класу високоточних та ненасичених методів розв’язування задач математичної фізики. В нашій роботі він поширюється на крайові задачі для системи рівнянь Нав’є-Стокса, які виникають при математичному описанні течій не стискуваної в’язкої рідини.

Квазіспектральні поліноми введені та досліджувались автором в багатьох роботах. Метод квазіспектральних поліномів також належить автору ([1–4]). Квазі-спектральні поліноми та метод квазіспектарльних поліномів використовуються до розв’язування крайових задач для диференційних рівнянь, систем звичайних нелінійних рівнянь та інших задач [1–4]. В пропонованій статті застосовано раніше вивчені властивості квазіспектральних поліномів та відповідних рядів Фур’є до розв’язування крайової задачі для системи рівнянь Нав’є-Стокса.

Під рідиною ми розуміємо не тільки власне рідину, наприклад воду, але також і газ. Повна система рівнянь Нав’є-Стокса є нелінійною і дуже затратною для машинного моделювання руху рідини, тому розглядається її спрощений варіант.

Метою нашої роботи є ефективне машинне розв’язання лінеаризованої моделі рівнянь Нав’є-Стокса у вигляді так званої крайової задачі Стокса. Оскільки лінійну задачу Стокса передбачається розв’язувати на кожній ітерації для того, щоб розв’язати повну систему рівнянь Нав’є-Стокса, то велике значення мають вимоги до швидкості машинної моделі.

Для кожної з трьох компонент вектора швидкості ставляться крайові умови Діріхле (умови прилипання), а для функції тиску фіксується значення лише в одній точці. Функцію тиску ми подаємо за системою квазіспектральних поліномів першого роду. Кожну з компонент швидкості подаємо по одній змінній за системою квазіспектральних поліномів другого роду, а по інших за системами квазіспектральних поліномів першого роду. Для дикретизації за просторовими змінними тривимірний поліноміальний базис будується як прямий добуток одномірних базисів квазіспектральних многочленів першого та другого родів таким чином, щоб уникнути необхідності введення штучних крайових умов для функції тиску як це практикується часто в аналогічних методах. Квазіспектральні поліноми першого роду більше пристосовані до крайових умов Діріхле, а другого роду – до крайових умов Неймана.

У випадку подання тиску квазі-спектральними поліномами першого роду по всіх змінних, коефіцієнти Фур'є поділяються на дві великі групи: крайові та внутрішні коефіцієнти Фур'є. Перші власне використовуються для подання крайових умов, а інші для подання функції всередині області.

За відомими крайовими умовами крайові коефіцієнти знаходяться прямими обчисленнями без необхідності врахування даних диференційних рівнянь.

Для дискретизації по часовій змінній ми використовуємо діагоналізацію матриць, а тоді метод Фур'є за системою комплексних квазіспектральних поліномів. Числові результати одержані для чисел Рейнольдса $Re = 700$.

Метод квазіспектральних поліномів є точним для поліномів, степінь яких не перевищує $2n$ по кожній із трьох просторових змінних та змінній по часу. Це означає, що у випадку многочленного розв'язку по всіх змінних, він відновлюється точно. Коли розв'язок задачі є довільною функцією соболевського простору, поліноміальне наближення дає по порядку відносно степені поліномів в середньоквадратичній метриці такий самий результат як розвинення розв'язку крайової задачі для рівняння Нав'є-Стокса в ряд Фур'є-Лежандра.

Спектральні методи використовують функції високого порядку. Для періодичних умов використовують тригонометричні функції, а для неперіодичних умов алгебраїчні поліноми високого порядку. У методах скінчених елементів використовують функції низького порядку. Якщо розв'язок, що апроксимується є достатньо гладким, метод квазіспектральних поліномів забезпечує експотенціальний порядок збіжності, а метод скінчених елементів – лише алгебрачний порядок збіжності, як правило порядок дорівнює 1–2, інколи 3, а ще рідше 4. Якщо розв'язок має особливості, то метод квазіспектральних поліномів забезпечує лише алгебраїчний порядок точності. Є ряд методів, що дозволяють виділити особливості розв'язку, включаючи в базисні функції спеціальні функції, що мають такі само особливості.

До спектральних методів належать метод Рітца, Бубнова-Галеркіна, або просто Галеркіна, метод найменших квадратів, метод моментів, проекційний метод, метод Галеркіна-Петрова, тау метод, метод колокацій. Згадані методи можна розглядати як часткові випадки проекційного методу. Традиційно в задачах гідродинаміки розглядають метод Галеркіна, тау метод та метод колокацій. Вибір базисних функцій у вигляді квазі-спектаральних поліномів перетворює спектральний метод на метод рядів Фур'є. Теоретичні результати апроксимації встановлені для спектральних методів звісно переносяться на випадок методу квазіспектральних поліномів. Специфіка квазіспектральних поліномів дозволяє встановити для них оцінки в L_2 метриці з конкретними константами, що характеризують порядок апроксимації.

Постановка крайової задачі Стокса. Математична модель буде ґрунтуватись на внутрішній задачі Стокса. Розглянемо внутрішню задачу Стокса: три рівняння динаміки для вектора $z = (u, v, w)$ швидкості

$$
\begin{aligned}
&-\left(h_x{}^2 u_{xx} + h_y{}^2 u_{yy} + h_z{}^2 u_{zz}\right) + h_z p_x = f\left(x,y,z\right),\\
&-\left(h_x{}^2 v_{xx} + h_y{}^2 v_{yy} + h_z{}^2 v_{zz}\right) + h_z p_y = q\left(x,y,z\right),\\
&-\left(h_x{}^2 w_{xx} + h_y{}^2 w_{yy} + h_z{}^2 w_{zz}\right) + h_z p_z = r\left(x,y,z\right),\\
&-1 < x,y,z < 1,
\end{aligned} \tag{1}
$$

поверхнева потужність потоку ($g = 0$ – умова нерозривності)

$$
h_x u_x + h_y v_y + h_z v_z = g\left(x,y,z\right), \quad -1 \le x,y,z \le 1, \tag{2}
$$

на межі області $-1 \le x,y,z \le 1$ – крайові умови першого роду

$$
u = \varphi\left(x,y,z\right), \quad v = \psi\left(x,y,z\right), \qquad w = \zeta\left(x,y,z\right) \tag{3}
$$

де h_x, h_y, h_z – деякі, додатні числа, $\varphi = \varphi\left(x,y,z\right)$, $\psi = \psi\left(x,y,z\right)$, $\zeta\left(x,y,z\right)$ – відомі функції. Будемо вважати, що крайові умови (3) узгоджені з рівнянням нерозривності на ребрах куба $-1 \le x,y,z \le 1$. Припустимо, що задача (1)–(3) має єдиний розв'язок u,v,w,p при умові, що $p\left(-1,-1,-1\right) = c$, де c – деяке число. Ми будемо вважати, для визначеності, що

$$
p\left(-1,-1,-1\right) = 1. \tag{4}
$$

Квазіспектральні поліноми першого $K_j^{\mathrm{o}}\left(x\right)$ та другого роду $K_i^{\mathrm{g}}\left(x\right)$ застосовувались в ряді робіт і, зокрема в [3; 4] до розв'язування задачі Діріхле, а в [2] – задачі Неймана.

Рівняння динаміки. Перейдемо до коефіцієнтів Фур'є в рівняннях динаміки (1), дістанемо

$$
\begin{aligned}
&-\left(h_x{}^2\left[u_{xx}\right]_{i,j}^{\mathrm{goo}} + h_y{}^2\left[u_{yy}\right]_{i,j,k}^{\mathrm{goo}} + h_z{}^2\left[u_{zz}\right]_{i,j,k}^{\mathrm{goo}}\right) + h_x\left[p_x\right]_{i,j,k}^{\mathrm{goo}} = f_{i,j,k}^{\mathrm{goo}},\\
&i = 0,\ldots,2n, \quad j,k = 1,\ldots,2n,\\
&-\left(h_x{}^2\left[v_{xx}\right]_{i,j,k}^{\mathrm{ogo}} + h_y{}^2\left[v_{yy}\right]_{i,j,k}^{\mathrm{ogo}} + h_z{}^2\left[v_{zz}\right]_{i,j,k}^{\mathrm{ogo}}\right) + h_y\left[p_y\right]_{i,j,k}^{\mathrm{ogo}} = q_{i,j,k}^{\mathrm{ogo}},\\
&j = 0,\ldots,2n, i,k = 1,\ldots,2n,\\
&-\left(h_x{}^2\left[w_{xx}\right]_{i,j,k}^{\mathrm{oog}} + h_y{}^2\left[w_{yy}\right]_{i,j,k}^{\mathrm{oog}} + h_z{}^2\left[w_{zz}\right]_{i,j,k}^{\mathrm{oog}}\right) + h_z\left[p_z\right]_{i,j,k}^{\mathrm{oog}} = r_{i,j,k}^{\mathrm{oog}},\\
&k = 0,\ldots,2n, i,j = 1,\ldots,2n,
\end{aligned} \tag{5}
$$

Виконуючи тут диференціювання в спектральному просторі за формулами

$$
\begin{gathered}
-\left(-\lambda_i^x u_{i,j,k}^{\mathrm{gpo}} + d_{\mathrm{g}x}^i \Delta_x^i u_{x,j,k}^{\mathrm{oo}}\right) - \left(-\lambda_j^y u_{i,j,k}^{\mathrm{gpo}} + d_{\mathrm{o}y}^j \Delta_y^j u_{i,k}^{\mathrm{gp}}\right) - \\
-\left(-\lambda_k^z u_{i,j,k}^{\mathrm{gpo}} + d_{\mathrm{o}z}^k \Delta_z^i u_{i,j}^{\mathrm{gp}}\right) + \left(\mu_i^x p_{i,j,k}^{\mathrm{ooo}} + d_{\mathrm{g}x}^i \Delta_x^i p_{j,k}^{\mathrm{oo}}\right) = f_{i,j,k}^{\mathrm{gpo}}, \\
-\left(-\lambda_i^x v_{i,j,k}^{\mathrm{ogp}} + d_{\mathrm{o}x}^i \Delta_x^i v_{j,k}^{\mathrm{gp}}\right) - \left(-\lambda_j^y v_{i,j,k}^{\mathrm{ogp}} + d_{\mathrm{g}y}^j \Delta_y^j v_{y,i,k}^{\mathrm{oo}}\right) + \\
-\left(-\lambda_k^z v_{i,j,k}^{\mathrm{ogp}} + d_{\mathrm{o}z}^k \Delta_z^k v_{i,j}^{\mathrm{og}}\right) + \left(\mu_j^y p_{i,j,k}^{\mathrm{ooo}} + d_{\mathrm{g}y}^j \Delta_y^j p_{i,k}^{\mathrm{oo}}\right) = q_{i,j,k}^{\mathrm{ogp}}, \\
-\left(-\lambda_i^x w_{i,j,k}^{\mathrm{oog}} + d_{\mathrm{o}x}^i \Delta_x^i w_{j,k}^{\mathrm{og}}\right) - \left(-\lambda_j^y w_{i,j,k}^{\mathrm{oog}} + d_{\mathrm{o}y}^j \Delta_y^j w_{i,k}^{\mathrm{og}}\right) - \\
-\left(-\lambda_k^z w_{i,j,k}^{\mathrm{oog}} + d_{\mathrm{g}z}^k \Delta_z^i w_{z,i,j}^{\mathrm{oo}}\right) + \left(\mu_k^z p_{i,j,k}^{\mathrm{ooo}} + d_{\mathrm{g}z}^k \Delta_z^k p_{i,j}^{\mathrm{oo}}\right) = r_{i,j,k}^{\mathrm{oog}},
\end{gathered}
$$

де

$$\lambda_i^x = h_x{}^2 \lambda_i, \ \mu_i^x = h_x \mu_i, \ d_{\mathrm{g}x}^i = h_x{}^2 d_{\mathrm{g}}^i, \ d_{\mathrm{o}x}^i = h_x{}^2 d_{\mathrm{o}}^i, \ \delta_{\mathrm{g}x}^i = h_x \delta_{\mathrm{g}}^i, \ \delta_{\mathrm{o}x}^i = h_x \delta_{\mathrm{o}}^i \tau_{2i}^{\mathrm{g}}.$$

Залишимо зліва знаку рівності члени з невідомими коефіцієнтами Фур'є:

$$
\begin{aligned}
&\left(\lambda_i^x + \lambda_j^y + \lambda_k^z\right) u_{i,j,k}^{\mathrm{gpo}} + \left(\mu_i^x p_{i,j,k}^{\mathrm{ooo}} + d_{\mathrm{g}x}^i \Delta_x^i p_{j,k}^{\mathrm{oo}}\right) = F_{i,j,k}^{\mathrm{gpo}}, \\
&i = 0,\ldots,2n;\ j,k = 1,\ldots,2n; \\
&\left(\lambda_i^x + \lambda_j^y + \lambda_k^z\right) v_{i,j,k}^{\mathrm{ogp}} + \left(\mu_j^y p_{i,j,k}^{\mathrm{ooo}} + d_{\mathrm{g}y}^j \Delta_y^j p_{i,k}^{\mathrm{oo}}\right) = Q_{i,j,k}^{\mathrm{ogp}}, \\
&j = 0,\ldots,2n; i,k = 1,\ldots,2n; \\
&\left(\lambda_i^x + \lambda_j^y + \lambda_k^z\right) w_{i,j,k}^{\mathrm{oog}} + \left(\mu_k^z p_{i,j,k}^{\mathrm{ooo}} + d_{\mathrm{g}z}^j \Delta_z^k p_{i,j}^{\mathrm{oo}}\right) = R_{i,j,k}^{\mathrm{oog}}, \\
&k = 0,\ldots,2n; i,j = 1,\ldots,2n;
\end{aligned}
\tag{6}
$$

де

$$
\begin{aligned}
F_{i,j,k}^{\mathrm{gpo}} &= f_{i,j,k}^{\mathrm{gpo}} + \left(d_{\mathrm{g}x}^i \Delta_x^i u_{x,j,k}^{\mathrm{oo}} + d_{\mathrm{o}y}^j \Delta_y^j u_{i,k}^{\mathrm{gp}} + d_{\mathrm{o}z}^k \Delta_z^k u_{i,j}^{\mathrm{gp}}\right), \\
Q_{i,j,k}^{\mathrm{ogp}} &= q_{i,j,k}^{\mathrm{ogp}} + \left(d_{\mathrm{o}x}^i \Delta_x^i v_{j,k}^{\mathrm{gp}} + d_{\mathrm{g}y}^j \Delta_y^j v_{y,i,k}^{\mathrm{oo}} + d_{\mathrm{o}z}^k \Delta_z^k v_{i,j}^{\mathrm{og}}\right), \\
R_{i,j,k}^{\mathrm{oog}} &= r_{i,j,k}^{\mathrm{oog}} + \left(d_{\mathrm{o}x}^i \Delta_x^i w_{j,k}^{\mathrm{og}} + d_{\mathrm{o}y}^j \Delta_y^j w_{i,k}^{\mathrm{og}} + d_{\mathrm{g}z}^k \Delta_z^k w_{z,i,j}^{\mathrm{oo}}\right).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Коефіцієнти Фур'є $\Delta_y^j u_{i,k}^{\mathrm{gp}}, \Delta_z^k u_{i,j}^{\mathrm{gp}}, \Delta_x^i v_{j,k}^{\mathrm{gp}}$ і т.д. будемо називати крайовими першого роду, бо вони прямо знаходяться із крайових умов першого роду для функцій u, v, w, при цьому використовуються їх значення при $x = \pm 1$, або $y = \pm 1$, або $z = \pm 1$.

Рівняння тиску

$$h_x{}^2 p_{xx} + h_y{}^2 p_{yy} + h_z{}^2 p_{zz} = G, \tag{8}$$

де

$$G = h_x f_x + h_y q_y + h_z r_z + \left(h_x{}^2 g_{xx} + h_y{}^2 g_{yy} + h_z{}^2 g_{zz} \right),$$

випливає із рівнянь (1),(2).

Для першої крайової задачі, тобто задачі Діріхле, зручно працювати з коефіцієнтами Фур'є за системою квазіспектральних поліномів першого роду $K_i^{\mathrm{o}}(x)$, причому коефіцієнти Фур'є можна поділити на дві великі групи. З однієї сторони це коефіцієнти для подання крайових умов (крайові коефіцієнти), а з іншої сторони це коефіцієнти, які відповідають поданню розв'язку у внутрішній частині області і таким чином пов'язані з таким явищем, як необхідність задовольнити рівняння Пуассона у внутрішніх точках області.

Перейдемо до коефіцієнтів Фур'є першого роду по обох змінних в рівнянні (8) для функції тиску. Виконаємо диференціювання в спектральному просторі коефіцієнтів Фур'є і дістанемо алгебраїчні рівняння

$$\begin{gathered}-\left(\lambda_i^x + \lambda_j^y + \lambda_k^z\right) p_{i,j,k}^{\mathrm{ooo}} + d_{\mathrm{o}x}^i \Delta_x^i p_{j,k}^{\mathrm{oo}} + d_{\mathrm{o}y}^j \Delta_y^j p_{i,k}^{\mathrm{oo}} + d_{\mathrm{o}z}^k \Delta_z^k p_{i,j}^{\mathrm{oo}} = G_{i,j,k}^{\mathrm{ooo}}, \\ i,j,k = 1,\ldots,2n,\end{gathered} \tag{9}$$

де

$$\begin{gathered}G_{i,j,k}^{\mathrm{ooo}} = -\mu_i^x f_{i,j,k}^{\mathrm{goo}} - \mu_j^y q_{i,j,k}^{\mathrm{ogo}} - \mu_k^z r_{i,j,k}^{\mathrm{oog}} - \left(\lambda_i^x + \lambda_j^y + \lambda_k^z\right) g_{i,j,k}^{\mathrm{ooo}} + \\ d_{\mathrm{o}x}^i \Delta_x^i g_{j,k}^{\mathrm{oo}} + d_{\mathrm{o}y}^j \Delta_y^j g_{i,k}^{\mathrm{oo}} + d_{\mathrm{o}z}^k \Delta_z^k g_{i,j}^{\mathrm{oo}}.\end{gathered} \tag{10}$$

Зазначимо, що внутрішні коефіцієнти Фур'є $p_{i,j,k}^{\mathrm{ooo}}$, загальним числом $(2n)^3$ та крайові коефіцієнти Фур'є $\Delta_x^i p_{j,k}^{\mathrm{oo}}, \Delta_y^j p_{i,k}^{\mathrm{oo}}, \Delta_z^k p_{i,j}^{\mathrm{oo}}$, або їм пропорційні

$$\begin{aligned} p_{N-i',2j-j',2k-k'}^{\mathrm{ooo}} &= \kappa_i \Delta_x^i p_{j,k}^{\mathrm{oo}}, \\ p_{2i-i',N-j',2k-k'}^{\mathrm{ooo}} &= \kappa_j \Delta_y^j p_{i,k}^{\mathrm{oo}}, \\ p_{2i-i',2j-j',N-k'}^{\mathrm{ooo}} &= \kappa_k \Delta_z^k p_{i,j}^{\mathrm{oo}}, \end{aligned}$$

які ми теж називаємо крайовими, загальним числом $6(2n)^2$ (приймаючи до уваги, що куб має 6 граней) є невідомими у внутрішній задачі Стокса, як зрештою як і всі інші коефіцієнти Фур'є. Крім крайових коефіцієнтів $\Delta_x^i p_{j,k}^{\mathrm{oo}}, \Delta_y^j p_{i,k}^{\mathrm{oo}}, \Delta_z^k p_{i,j}^{\mathrm{oo}}$, які є внутрішніми коефіцієнтами Фур'є граней, є ще крайові коефіцієнти

$$p_{2i-i',N-j',N-k'}^{\mathrm{ooo}}, p_{N-i',2j-j',N-k'}^{\mathrm{ooo}}, p_{N-i',N-j',2k-k'}^{\mathrm{ooo}},$$

які відповідають ребрам паралельним координатним осям OX, OY, OZ, відповідно, і які ми будемо називати реберними коефіцієнтами Фур'є.

Загальне число реберних коефіцієнтів Фур'є дорівнює $12(2n)$, враховуючи що число ребер куба дорівнює 12.

Нарешті до крайових коефіцієнтів Фур'є ми відносимо

$$p^{\infty\infty\infty}_{N-i',N-j',N-k'} = \kappa_{i'}\kappa_{j'}\kappa_{k'}\Delta^{i'}\Delta^{j'}\Delta^{k'} p, \quad i', j', k' = 0,1, \tag{11}$$

які ми називатимемо кутовими коефіцієнтами Фур'є. Їх кількість, звісно, дорівнює 6 за числом вершин куба.

Реберні та кутові коефіцієнти визначаються прями обчисленнями з відомих крайових умов, щоправда залучаючи до їх визначення рівняння динаміки. Внутрішні крайові коефіцієнти Фур'є визначаються набагато складніше із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, використовуючи рівняння динаміки в спектральному просторі (6). Як бачимо алгебраїчна структура коефіцієнтів Фур'є першого роду чудово поєднується з топологічною структурою куба, тобто кожному з таких елементів куба як внутрішність, грані, ребра, вершини відповідають коефіцієнти Фур'є, причому взаємооднозначно.

З наведеного дослідження можна зробити висновок, що автором розроблено та поширено новий, економний, швидкий та високоточний метод квазіспектральних поліномів, на випадок наближеного розв'язування внутрішньої крайової задачі Стокса в паралелепіпеді та L-подібних областях тривимірного простору. Проведені розрахунки для конкретних задач Стокса показують, що характер поведінки похибок схожий до того, який спостерігався у випадку задачі Діріхле для рівняння Пуассона. Застосування методів типу Гальоркіна з базисом у вигляді класичних ортогональних поліномів вимагало б розв'язання системи лінійних рівнянь із щільною матрицею такої ж розмірності m.

1. Янчук П. С. Использование А-метода при решении эллиптических и параболических уравнений / П. С.Янчук // Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов. – Киев, 1989. – С. 112–121. **2**. Янчук П. С. Про оцінки похибок поліноміальної апроксимації розв'язку задачі Неймана для рівняння Пуассона / П. С. Янчук // Волинський математичний вісник. – 2012. – Вип. 9 (18). – С. 189–207. **3**. Янчук П. С. Про спектральний метод наближеного розв'язування рівняння Пуассона / П. С. Янчук // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д., 2012. – С. 261–268. **4**. Янчук П. С. Поліноміальна апроксимація розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона з неоднорідними крайовими умовами / П. С. Янчук // Волинський математичний вісник. – 2011. – Вип. 8 (17). – С. 213–239.

Рецензент : д.ф.-м.н., професор Джунь Й. В.