УДК 378: 004. 9

Джунь Й. В., д.ф.-м.н., професор (Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем'янчука, м. Рівне)

ВИКОРИСТАННЯ СЕРЕДНЬО-АРИФМЕТИЧНОЇ ОЦІНКИ В ПЕДАГОГІЧНИХ ТА ПСИХОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

***Анотація**. В статті розкрито важливість точного статистичного розуміння суті середньої, простої і зваженої, в педагогічних дослідженнях. Показано, що нерозуміння її статистичної суті призводить до некоректного аналізу даних, що є однією з головних причин відхилення дисертацій експертами ДАК МОН України. Обґрунтовано історичне походження строгого математичного розуміння поняття однорідності, з якого випливає, що однорідними є лише такі величини (дані), які підкоряються нормальному закону розподілу. Визначено, що лише за такої умови середня арифметична може правомірно використовуватись в педагогічних та інших дослідженнях, можна точно визначити її надійність і побудувати для неї довірчі інтервали, а за ненормальності вихідних даних статистична середня втрачає свій науковий зміст і її надійність достовірно оцінити неможливо.*
***Ключові слова:** середня арифметична проста і зважена, однорідність (нормальність) вибірки, нормальний закон.*

***Аннотация**. В статье раскрыто важность точного статистического понимания сути средней, простой и взвешенной, в педагогических исследованиях. Показано, что непонимание её статистической сущности приводит к некорректному анализу данных, что есть одной из главных причин отклонения диссертаций экспертами ГАК МОН Украины. Обоснована история возникновения строгого математического определения понятия однородности, из которого следует, что однородными есть только такие величины (данные), которые подчиняются нормальному закону распределения. Определено, что только при этом условии средняя арифметическая может правомерно использоваться в педагогических и других исследованиях, можно определить её надежность и построить для нее доверительные интервалы, а при ненормальности исходных данных статистическая средняя теряет свое научное обоснование и ее надежность достоверно оценить невозможно.*
***Ключевые слова:** средняя арифметическая простая и взвешенная, однородность (нормальность) выборок, нормальный закон.*

***Annotation.** The article points out the importance of an accurate statistical understanding of the average, simple and factored essence in pedagogical*

research. It is shown that the misunderstanding of its statistical essence leads to the incorrect analysis of the data, which is one of the main reasons for rejecting dissertations by the experts of the SAC MES of Ukraine. The history of the creation of a strict mathematical definition of the concept of homogeneity is revealed, it means that the only those quantities (data) that are homogeneous can be the subjects of the normal distribution law. Only under this condition, the average arithmetic can be used in the pedagogical and other studies. So, it is possible to determine its reliability and build confidence intervals for it. When the basic data is abnormal, then the statistical average loses its scientific justification and its reliability cannot be estimated.
Key words: *average, simple and factored arithmetic, homogeneity (normality) of the sample, normal law.*

Викладачі кафедр педагогіки, психології та інших суміжних спеціальностей досить часто використовують в своїх дослідженнях середні арифметичні: середній бал успішності з певного предмету, середній відсоток студентів, присутніх на заняттях, тощо. Це, так би мовити, технічні, або, інакше, – виробничі оцінки і до них якісь теоретичні чи математичні вимоги застосовувати навряд чи доцільно. Але зовсім інші, кардинально відмінні вимоги до середніх арифметичних, – як простих так і зважених, необхідно пред'являти тоді, коли вони використовуються в наукових дослідженнях: спектральному аналізі динамічних процесів, регресійному, дисперсійному аналізах, математичному моделюванні з метою прогностичних висновків чи для вирішення інших дослідницьких завдань. Педагоги ВНЗ, займаючись дослідницькою роботою, часто і не підозрюють про існування теорії похибок, а тому часто не замислюються, чи не розуміють в чому ж полягає науково-доказовий зміст середньої, тобто, такий її зміст до якого може бути обґрунтовано застосований увесь арсенал сучасних математико – статистичних процедур. Кажуть, що вся статистика це, по-перше, наука середніх величин. Практика показує, що безграмотне, приблизне, некоректне застосування статистичних методів є основним недоліком, скоріше, основною бідою дисертаційних досліджень, із-за чого вони не затверджуються ДАК МОН України. Саме про це повідомляє інспектор ДАК МОН Л. О. Атраментова в [1]. Але звинувачувати в цьому лише педагогів-дослідників не варто.

Аналіз останніх досліджень підручників із статистики показує, що в розділі «Середні величини», як правило, стверджується, що для того, щоб середня арифметична мала обґрунтований характер, вибірка має бути однорідною. А от означення того, що ж це таке однорідність – настільки туманні, розпливчасті, неоднозначні і філософські, що зрозуміти щось з того не лише студенту, але й професору неможливо. Ці означення охоплюють величезні інтервали часу – від цицеронівського: «однорідним є лише те, що має спільну природу», до ще більше «істинного»: «однорідність відображає всю глибину матеріалістично – діалектичного бачення природи». Чи зрозумілим стає поняття однорідності з таких означень, цитовані «шедеври» яких терпляче зібрав автор в роботі [2]? *Висновок є цілком* однозначним: самі автори більшості означень поняття однорідності не розуміють, що це таке. В той же час є цілком точне, математично строге, і зрозуміле поняття однорідності даних, висловлене геніальним німецьким вченим К. Ф. Гаусом ще в 1809 р. [3]:

$$P_i = \frac{y'}{x_i y} = const\,, \qquad (1)$$

де y – щільність ймовірності розподілу вибірки;

x – відхилення від середньої.

Саме за умови (1) всі спостереження мають однакову вагу P_i, тобто, є однорідними і можуть осереднюватись. Гаус показав, що вимога (1) виконується тоді і лише тоді, коли y є щільністю нормального розподілу. Отже, головний наш висновок є простим і математично бездоганним: однорідними є лише ті величини (статистичні дані), які підкоряються нормальному закону розподілу. Ненормальні величини, тобто, ті дані, які не підкоряються закону Гауса, однорідними вважати не можна.

Лише за нормальності вибірки середня має точний математично обґрунтований зміст. Лише за цієї умови ми можемо математично – строго оцінити її надійність і належним чином використовувати в наукових висновках. І, звичайно, всього цього досягти неможливо у випадку ненормальності y в (1).

До цього доречно повідомити те, що в 2004 р. на кафедру математичного моделювання МЕГУ з 11 класу Рівненської української гімназії прийшла учениця Лонія Левченко (без супроводу вчителів та батьків) і заявила, що вона хоче займатись наукою. Їй була доручена математична перевірка цицеронівського означення однорідності в рамках співпраці МЕГУ – МАН при Рівненській ОДА. Для дослідження було взято один двохсотграмовий стакан квасолі одного сорту, яка виросла протягом року на одній і тій же ділянці. Ці всі квасолини за Цицероном мали цілком спільну природу, походження і однакові умови розвитку, але виявилось, що вага квасолин підкоряться гамма – розподілу, тобто, за вагою зерна квасолин не є однорідними, оскільки не підкоряються закону Гауса. Ця робота виконувалась в рамках теми: «Методологія відкриття нових законів випадкових явищ» і є таким науковим результатом, який можна вважати відкриттям [4], оскільки в науковій літературі вважалось, що такі ваги мусять бути лише нормальними.

Для перевірки нормальності розподілу вибірки (її однорідності) є досить потужні засоби математичної статистики,найкращим з яких є χ^2 – критерій Пірсона. Проте, при використанні цього критерію часто не дотримуються головних умов його використання, які є наступними:

– експериментальні дані мають бути незалежними, тобто, не пов'язаними кореляційно;

– обсяг вибірки має бути не меншим ніж 50 одиниць;

– частоти в інтервалах бажано щоб були більші ніж 2.

Якщо попередня умова не виконується, то проводиться об'єднання суміжних груп. При цьому, якщо обсяги вибірок nзнаходяться в межах $50 \le n < 500$, то для розрахунку числа інтервалів гістограми можна використовувати правило Старджеса [5, с. 175]. Для великих вибірок, коли $n > 500$, рекомендується користуватись правилом [6, с. 74]:

$$r = 0{,}51\sqrt{n}. \tag{2}$$

Простим у застосуванні є критерій Колмогорова (λ-критерій). В якості міри розходження між теоретичним (гаусівським) і реальним розподілами Колмогоров розглядає максимальне значення модуля різниці між вибірковою функцією розподілу $F^*(x)$ і теоретичною $F(x)$:

$$D = max|F^*(x) - F(x)| \tag{3}$$

Колмогоров показав, що при будь-якій $F^*(x)$, при $n \to \infty$, ймовірність *$P(\lambda)$ нерівності:*

$$D\sqrt{n} \ge \lambda \tag{4}$$

прямує до границі:

$$P(\lambda) = 1 - K(\lambda), \tag{5}$$

$$\text{де } K(\lambda) = \sum_{K-\infty}^{\infty}(-1)^K e^{-2K^2\lambda^2} . \tag{6}$$

Значенняλвизначають за формулою:

$$\lambda = D\sqrt{n}. \tag{7}$$

Використовуючи λ, обчислене за формулою (7), за допомогою табл. 1 розраховуємо ймовірність $P(\lambda)$ того, що цей вибірковий розподіл співпадає з теоретичним Гаусовим $F(x)$ [7, с. 74].

Таблиця 1

λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$
0,1	1,000	0,7	0,711	1,4	0,040
0,2	1,000	0,8	0,544	1,5	0,022
0,3	1,000	0,9	0,393	1,6	0,012
0,4	1,000	1,0	0,270	1,7	0,006
0,5	0,997	1,1	0,178	1,8	0,003
0,6	0,964	1,2	0,112	1,9	0,002
	0,864	1,3	0,068	2,0	0,001

Слід підкреслити, що формула (6) починає діяти більш-менш задовільно лише при $n \geq 20$. (Стандарт ГОСТ 27.005-97 регламентує обсяг вибірки $n \geq 100$ [8, с. 182]). Проте, часто користувачі забувають про цю важливу вимогу і застосовують цей критерій неправильно. Більше того, приклади неточного, вкрай спрощеного застосування критерію Колмогорова можна знайти навіть в багатьох розповсюджених підручниках з математичної статистики [9, гл. VI; 10, гл. IV; 11, гл. IV; 12, с. 395].

Ще одне важливе зауваження: λ-критерій може бути застосований лише у тому випадку, коли гіпотетична функція розподілу $F(x)$ повністю відома, тобто, коли відомий не лише вид функції $F(x)$, але і усі параметри, що її визначають. Чи зустрічається така ситуація на практиці? Ніколи! Зазвичай із теоретичних міркувань нам відомий лише загальний, а не точний вид інтегральної функції $F(x)$, а її числові параметри визначаються за наявним статистичним матеріалом, число спостережень у якому $n < \infty$. При застосуванні критерію χ^2 ця обставина враховується відповідним зменшенням числа ступенів свободи χ^2-розподілу. Критерій Колмогорова такої узгодженості не передбачає. Цю обставину залишають поза увагою не лише фахівці в галузі комп'ютерного забезпечення інтелектуального аналізу даних, але і спеціалісти із математичної статистики, вважаючи, що авторитет такого математика як А. М. Колмогоров настільки високий, що можна повністю йому довіритись, не помічаючи того, що λ-тест має досить приблизний характер навіть при $n \geq 20$.

Що буде, якщо паралельно застосувати до одних і тих же даних χ^2 і λ-критерій? Результат буде таким: завжди критерій Колмогорова буде давати завищені значення імовірності. А це значить, що в цілому ряді випадків λ-критерій дозволить прийняти за правдоподібну таку гіпотезу, яка в дійсності набагато гірше узгоджується із дослідницькими даними. Наприклад, отримані такі результати іспиту з інформатики для двох груп студентів-педагогів (табл. 2.).

Таблиця 2

Результати іспиту з інформатики для двох груп студентів-педагогів ($n = 50$)

Інтервали в балах	60	65	70	75	80	85	90	95	100
Частоти	1	4	9	12	13	7	3	1	

Критерій χ^2 дає імовірність, що частоти розподіляються нормально: 64,4 %, а λ-критерій дає для цього ж ряду імовірність 98,9 %. Як бачимо, відмінність є істотною. У випадку малої кількості спостережень ($n \geq 11$) можна успішно застосовувати d-статистику [13, с. 85]. При цьому рівень ризику, як правило, приймають 5 % або 10 %.

Підводячи підсумки нашого дослідження можна зробити такі висновки: однорідність даних означає їх нормальність. Отже, середня арифметична проста і зважена, є науково обґрунтованою оцінкою лише за умови нормальності вихідних даних. В усіх інших випадках середня має не науковий, а , скоріше, грубо-оціночний чи побутовий характер, надійність якої достовірно оцінити неможливо.

1. Атраментова Л. О. Наукове дослідження і статистика // Л. О. Атраментова / Науковий світ. – 2006. – № 4. – С. 6–7. **2.** Джунь Й. В. Математичне ессе про поняття однорідних величин у статистиці // Й. В. Джунь. Психолого-педагогічні основи гуманізації навчально-виховного процесу в школі та ВНЗ : зб. наук. праць. Рівне : РВЦ МЕГУ. – 2015. – С. 373–379. **3.** Gauss C. F. Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium. Humburgi, 1809. **4.** Джунь Й. В. Зірки на небі «РЕГІ» // Й. В. Джунь. Нова Волинь, 12.04.2004, с. 3. **5**. Новицкий П. В. Оценка погрешностей результатов измерений / П. В. Новицкий, И. А. Зограф. – 2-е изд., перераб. и доп. – Л. : Энергоатомиздат. Ленинградское отделение. –1991. – 304 с. **6**. Dzhun I. V. On the Number of Boxes in Physics of Celestial Bodies/New York: Allerton Press Inc., 1993, vol. 9, № 1, pp. 72–76. **7.** Вентиель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентиель. Изд. 4-е, М. : Наука, 1969. – 576 с. **8.** Горбань І. І. Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів / І. І. Горбань. К. : 2003. – С. 244. **9.** Дунин-Барковский И. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике / И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов. М. : ГИТТЛ. – 1955. – 512 с. **10.** Романовский В. И. Математическая статистика. т. 2, Ташкент. Изд-во АН Узб. ССР, 1963. **11.** Налимов В. В. Применение математической статистики при анализе вещества. / В. В. Налимов. М. : Физматгиз, 1960. **12.** Бобик О. І. Теорія ймовірностей і математична статистика. Підручник / О. І. Бобик, Г. І. Берегова, Б. І. Копитко. К. : ВД «Професіонал». – 1977. – 266 с. **13.** Большев Л. Н. Таблицы математической ститистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. М. : ВЦ АН СССР, 1968. – 476 с.

Рецензент: д.т.н., професор Власюк А. П.